THESE

présentée à

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir le grade de

Docteur de Spécialité (3e cycle)

Spécialité : MATHEMATIQUES APPLIQUEES
Section : ANALYSE NUMERIQUE

par

Isak BEHAR

Procédés de régularisation de problèmes d'optimisation et de mini - max

Thèse soutenue le 14 février 1974 devant la commission d'examen

Monsieur	N.	GASTINEL	Président
Monsieur	P.J.	LAURENT	Examinateurs
Monsieur	B.	MARTINET	

THESE

présentée à

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir le grade de

Docteur de Spécialité (3e cycle)

Spécialité : MATHEMATIQUES APPLIQUEES
Section : ANALYSE NUMERIQUE

par

Isak BEHAR

Procédés de régularisation de problèmes d'optimisation et de mini - max

Thèse soutenue le 14 février 1974 devant la commission d'examen

Monsieur	N.	GASTINEL	Président
Monsieur	P.J.	LAURENT	Examinateurs
Monsieur	B.	MARTINET	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Jean	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique

Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physilogie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale

MM.	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	HANO JUN-ICHI	Mathématiques Pures
	STEPHENS Michaël	Mathématiques appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et Minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUVARD Maurice	Mécanique des fluides
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
	LACOUME Jean-Louis	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)

MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle	RIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RENAUD Maurice	Chimie
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marquerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	SIDNEY STUARD	Mathématiques Pures
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physilogie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 30 mai 1972.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544305_0036

TABLE DES MATIERES

			Pages
- INTRODUCTION GENERALE -			1
Notations et définitions	:		3
PREMIERE PARTIE	:	REGULARISATION DES PROBLEMES D'OPTIMISATION	
Introduction	:		7
Chapitre 1	:	Régularisations ordinaires	10
(1.1)	:	Cas de convergence	11
(1.2)	:	Existence et propriétés des points d'adhérence des solutions du problème (P_n).	17
(1.3)	:	Cas convexe	22
Chapitre 2	:	Régularisations par translation	24
(2.1)	:	Régularisation par translation simples	25
(2.2)	:	Propriétés de l'uniforme convexité	32
(2.3)	:	Amélioration du procédé de régularisation par translation	38
(2.4)	:	Quelques propriétés de l'application U définie en (2.1)	43
DEUXIEME PARTIE	:	REGULARISATION DES PROBLEMES DE MINI-MAX	
Introduction	:		48
Chapitre 3	:	Généralités sur la théorie des perturbations	49
(3.1)	:	Perturbations	49
(3.2)	:	Notion de point de selle d'un triplet	55

Chapitre 4 : Régularisation des problèmes de points de selle 58
Régularisation partielles 59

(4.1) : Régularisations ordinaires 60
(4.2) : Régularisation par translation 70
(4.3) : Régularisation des problèmes de points de selle, sur l'ensemble des variables 77

TROISIEME PARTIE : METHODES NUMERIQUES POUR LA RECHERCHE DES POINTS DE SELLE DES FONCTIONNELLES CONVEXES-UNIFORMEMENT CONCAVES.

Introduction : 83

Chapitre 5 : Algorithme pour la recherche des points de selle des fonctionnelles convexe-uniformément concaves 84

(5.1) : Position du problème et description de l'algorithme 85
(5.2) : Propriétés de l'algorithme 91
(5.3) : Convergence de l'algorithme 95
(5.4) : Estimation de l'erreur 99
(5.5) : Généralisation du procédé décrit en (5.1.2) 102
(5.6) : Calculs intermédiaires 113
(5.7) : Application du procédé décrit en (5.1.2) à deux problèmes de régularisation partielle 119

ANNEXE 137

REFERENCES 155

Cette Thèse a été préparé au Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble I.

Je tiens a exprimer ma très vive reconnaissance à Monsieur le Professeur N. GASTINEL qui m'a fait l'honneur de présider le Jury.

Monsieur le Professeur P.J. LAURENT qui a dirigé ce travail, par son aide permanente et ses conseils très précieux, m'a permis de le mener à bien. Je lui témoigne ici ma plus profonde gratitude.

Monsieur B. MARTINET, Maître de Conférence à l'Université de Provence, dont les suggestions et les encouragements me furent d'une très grande utilité, m'a donné la joie de bien vouloir faire partie du Jury. Je lui exprime ici ma très grande reconnaissance.

Je tiens a remercier Mademoiselle Cl. PAYERNE qui a apporté le plus grand soin à la réalisation pratique de cette Thèse, ainsi que tous les membres de l'Equipe d'Analyse Numérique qui m'ont aidé dans l'élaboration de ce travail.

INTRODUCTION GENERALE

On présente dans ce travail une étude des procédés de régularisation des problèmes d'optimisation et de mini-max, ainsi que des méthodes de recherche des points de selle des fonctionnelles convexes-uniformément concaves.

Le but des méthodes de régularisation proposées est de rendre strictement convexe (concave) ou uniformément convexe (concave) un problème qui ne l'est pas. Cependant dans le texte on ne précise pas toujours la raison pour laquelle on régularise un problème d'optimisation ou de mini-max. D'une manière générale lorsqu'on a un problème d'optimisation ou de mini-max on considère une suite de problèmes régularisés dont on cherche la convergence des solutions vers certaines solutions du problème posé. Pour l'étude de la convergence proprement dite il n'est pas nécessaire de justifier la régularisation. Ceci est le cas dans les chapîtres 1, 2 et 4.

Les chapîtres 1 et 2 sont regroupés dans la première partie du présent travail, où l'on étudie la convergence des procédés de régularisation dans les problèmes d'optimisation.

Les chapîtres 3 et 4 sont regroupés dans la deuxième partie.

Au chapitre 3 nous nous contentons de faire des rappels sur la dualité et sur le lien entre deux problèmes d'optimisation mis en dualité.

Au chapitre 4 nous étudions des méthodes de régularisation dans les problèmes de mini-max convexes-concaves. Nous nous servons constamment des résultats des chapîtres 1 et 2. En régularisant le problème dual associé à un problème de mini-max, nous générons des nouvelles méthodes pour la solution du problème primal. Nous obtenons ainsi une nouvelle classe de méthodes pour la résolution des problèmes d'optimisation.

La troisième partie est constituée du chapître 5 et d'une annexe où nous donnons des résultats numériques.

Au chapître 5 on propose une méthode pour la recherche des points de selle des fonctionnelles convexes-uniformément concaves. L'hypothèse d'uniforme concavité qui est essentielle pour la converger de cette méthode justifie les méthodes de régularisation étudiée dans chapîtres précédents. Ainsi des problèmes de mini-max ne vérifiant cet hypothèse peuvent être régularisé au sens de l'uniforme concavité pour être résolus par la méthode proposée au chapître 5. La dernière partie chapître 5 est consacrée à deux exemples de ce type.

NOTATIONS ET DEFINITIONS

Nous donnons brièvement les notations et définitions qui seront utilisées dans ce travail. Dans une large mesure nous les rapp lons dans le texte même. A ce sujet on pourra consulter [1].

. On dit que deux espaces vectoriels (réels) X et Y sont mis en dualité par une fonctionnelle bilinéaire :

$$(x,y) \in X \times Y \to \langle y,x \rangle \in \mathbb{R}$$

Si pour tout $x \in X \quad x \neq 0$, il existe $y \in Y$ tel que $\langle y,x \rangle \neq 0$ et
pour tout $y \in Y \quad y \neq 0$, il existe $x \in X$ tel que $\langle y,x \rangle \neq 0$.

. Une topologie localement convexe sur X sera dite compatible avec la d entre X et Y si la fonctionnelle linéaire :

$$x \in X \to \langle y,x \rangle \in \mathbb{R}$$

est continue pour tout $y \in Y$, et si toute fonctionnelle linéaire con sur X est représentée de cette façon.
On dira dans ce cas que le dual de X est identique à Y.

. Si deux espaces vectoriels topologiques localement convexes (EVTLC) X et Y sont mis en dualité par une fonctionnelle bilinéaire (leurs topologies étant compatibles avec la dualité), on dira que les (EVTLC) X et Y sont en dualité.
(Dans ce cas les topologies de X et de Y sont forcément séparées).

. On notera par $\bar{\mathbb{R}}$ la droite achevée. C'est-à-dire :

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

avec la loi d'addition :

$$a + (+\infty) = + \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$a + (-\infty) = - \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

. On notera par $Ap(X,\bar{\mathbb{R}})$ les applications définies sur X et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

. Soit C une partie quelconque de X, on notera par $X_C \in Ap(E,\bar{\mathbb{R}})$ la fonctionnelle :

$$X_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in C \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

. Soit $f \in Ap(X,\bar{\mathbb{R}})$. On appelle épigraphe de f le sous-ensemble de $X \times \mathbb{R}$:

$$épi(f) = \{(x,\lambda) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}$$

. Une fonctionnelle $f \in Ap(X,\bar{\mathbb{R}})$ sera dite convexe si :

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad , \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

on a :

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

f sera dite concave si :

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Lorsque ces inégalités sont strictes alors on dira que f est strictement convexe (resp. concave).

. Si X est un espace de Banach réel, une fonctionnelle $f \in Ap(E,\bar{\mathbb{R}})$ sera dite uniformément convexe (resp. concave) d'uniforme convexité (U.C.) (resp. de concavité) δ s'il existe une application $\delta: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ non décroissante, nulle seulement en zéro telle que :

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - \delta(\|x_1-x_2\|)$$

$$\left[\text{resp. } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \delta(\|x_1-x_2\|)\right]$$

. On notera par $\Gamma(X)$ l'ensemble des fonctionnelles $f \in Ap(E,\mathbb{R})$ convexes est semi continues inférieurement et par $\Gamma_o(X)$ l'ensemble des fonctionnelles $f \in \Gamma(X)$ telles que :

i) $f \not\equiv +\infty$

ii) $f(x) > -\infty \qquad \forall x \in X$

(Si $f \in \Gamma_o(X)$ on dira que f est propre).

. Soit C une partie de E on dira qu'une fonctionnelle $f \in Ap(E,\bar{\mathbb{R}})$ est inf-compacte (resp. sup-compacte) sur C si pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'ensemble

$$\{x \in C : f(x) \leq a\} \quad \text{est compact}$$

(resp. $\{x \in C : f(x) \geq a\}$ est compact).

. On appelle domaine effectif d'une fonctionnelle $f \in Ap(X,\bar{\mathbb{R}})$ l'ensemble

$$\text{dom } f = \{x \in X : f(x) \neq +\infty\} \quad .$$

. Soit $f \in \Gamma(X)$. On appelle sous différentiel de f au point $x_o \in X$, l'ensemble noté $\partial f(x_o) \subset Y$ (Y étant un espace en dualité avec X) tel que pour tout $y_o \in \partial f(x_o)$ on ait :

$$f(x) \geq f(x_o) + \langle y_o, x-x_o \rangle \qquad , \qquad \forall x \in E \ .$$

. Soient E et F deux espaces vectoriels. On dit qu'une fonctionnelle :

$$L : E \times F \to \bar{\mathbb{R}}$$

est convexe-concave si :

Pour tout $v \in F$ la fonctionnelle $L(.,v)$ est convexe

Pour tout $x \in E$ la fonctionnelle $L(x,.)$ est concave

. On dit qu'un point $[\bar{x},\bar{v}] \in E \times F$ est un point de selle d'une fonctic
L convexe-concave, si on a :

$$L(\bar{x},v) \leq L(\bar{x},\bar{v}) \leq L(x,\bar{v}) \quad , \quad \forall x \in E \ , \ \forall v \in F \ .$$

PREMIERE PARTIE

REGULARISATION DES PROBLEMES D'OPTIMISATION

INTRODUCTION

Lorsqu'un problème d'optimisation est donné il arrive souver que quelques hypothèses soient insatisfaites pour l'application de cer taines méthodes. On se pose alors le problème de la modification du pr blème donné pour le rendre apte à être résolu sans grande difficulté p une méthode d'optimisation. Par exemple lorsqu'on doit minimiser une fonctionnelle convexe, mais non strictement convexe, on pourrait cons: dérer un autre problème de minimisation, avec la fonctionnelle à mini: strictement convexe, dont la solution varierait peu de celle du probl posé. On régulariserait ainsi le problème du départ au sens de la str convexité.

Dans cette partie nous nous proposons d'étudier des méthode: régularisation pour pouvoir plus facilement résoudre un problème de m misation.

Soit E un (E.V.T.L.C.S.), f une fonctionnelle définie sur E. ($f \in Ap(E,\mathbb{R})$) et C une partie fermée de E. On considère le problème suivant :

(P) Calculer $\alpha = \inf_{x \in C} f(x)$

et $\Omega = \{x \in C : f(x) = \alpha\}$

Hypothèses sur f :

Dans toute la suite nous supposerons :

1) α fini

2) f semi continue inférieurement (s.c.i.)

PROBLEME REGULARISE

On considère une fonctionnelle $H \in Ap(E,\bar{\mathbb{R}})$ et le problème suivant :

(P_H) Calculer $\alpha_H = \inf_{x \in C} (f(x)+H(x))$

et $\Omega_H = \{x \in C : f(x)+H(x) = \alpha_H\}$

DEFINITION :

Le problème (P_H) sera appelé, le rproblème H-régularisé du problème (P).

La fonctionnelle H sera appelé fonctionnelle régularisante.

Les méthodes qu'on étudiera dans cette partie consisterons à établir un rapport entre les problèmes (P_H) et (P).

On distinguera deux types de régularisation :

1) Régularisations ordinaires

2) Régularisations par translation .

Au premier chapitre nous définirons et étudierons les régularisations ordinaires dans le cas général.

Au deuxième chapitre nous définirons et étudierons les régularisations par translation dans le cas convexe seulement.

CHAPITRE 1

REGULARISATIONS ORDINAIRES

On considère une suite $H_n \in Ap(E,\bar{\mathbb{R}})$ de fonctionnelles régularisantes et le problème suivant :

(P_n) $\quad \alpha_n = \inf_{x \in C} (f(x)+H_n(x))$

$\Omega_n = \{x \in C : f(x)+H_n(x) = \alpha_n\}$.

Nous aurons à imposer des conditions à la suite H_n pour obtenir d'une part la convergence de α_n vers α et d'autre part pour obtenir la convergence des solutions du problème (P_n) vers celles du problème (P).

Par ailleurs l'ensemble Ω des solutions du problème (P) peut être vide. Par contre les conditions que nous imposerons à la suite H_n doivent être de nature à assurer l'existence des solutions du problème (P_n). Il est évident que le fait que le problème (P_n) admette des solutions pour tout $n \in \mathbb{N}$ n'entraine pas l'existence des solutions problème (P). Nous allons choisir la suite H_n telle que la convergence des suites des solutions des problèmes (P_n) soit de nature a nous renseigner sur l'existence des solutions du problème donné.

1.1. CAS DE CONVERGENCE

On fait les hypothèses suivantes sur les H_n :

(I.1.H)

1) pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un $M_n \in \mathbb{R}$ tel que :

   i) $H_n(x) \geq M_n \quad \forall x \in C$

   ii) $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$

2) $\lim_{n\to\infty} H_n(x) = 0 \quad \forall x \in C$

3) pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonctionnelle H_n est s.c.i. et inf-compa sur C.

1.1.1. PROPOSITION

Si α est fini et si la suite des fonctionnelles $H_n \in Ap(E,\bar{\mathbb{R}}$ vérifie les hypothèses (I.1.H),

Alors :

1) pour tout $n \in \mathbb{N}$ le problème (P_n) admet des solutions, c'est-à-dire $\Omega_n \neq \emptyset$.

2) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$

3) soit une suite $(x_n)_{n \in N}$ des solutions du problème (P_n) ; autrement dit, $x_n \in \Omega_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   Alors on a :

   i) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$

   ii) tout point d'adhérence (s'il en existe) de la suite $(x_n)_n$ est une solution du problème (P).

Démonstration :

1) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonctionnelle $f+H_n$ est inf-c et bornée inférieurement sur C.

Soit $a \in \mathbb{R}$; on pose :

$$S_a = \{x \in C : f(x)+H_n(x) \leq a\} ,$$

comme on a :

$$f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in C$$

il s'en suit

$$S_a \subset \{x \in C : H_n(x) \leq a-\alpha\}$$

L'inf-compacité de H_n entraine avec la semi continuité inférieure de f et de H, que S_a est compact d'où l'inf-compacité de $f+H_n$.

Par ailleurs, on a par hypothèse :

$$f(x)+H_n(x) \geq \alpha+M_n \qquad \forall x \in C$$

Ce qui montre que la fonctionnelle $f+H_n$ est bornée inférieurement sur C

Ce qui entraine en fin de compte que le minimum de $f+H_n$ est atteint sur C ; on a donc $\Omega_n \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) H_n étant minorée par M_n on a :

(1) $$f(x)+M_n \leq f(x)+H_n(x) \qquad \forall x \in C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En prenant l'infimum de chaque côté de l'inégalité il vient :

$$\alpha+M_n \leq \alpha_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

D'où :

(2) $$\alpha \leq \liminf_{n\to\infty} \alpha_n$$

Par définition on a :

$$\alpha_n \leq f(x)+H_n(x) \qquad \forall x \in C \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

par passage à la limite :

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} \text{Sup } \alpha_n \leq f(x) \qquad \forall x \in C$$

(2) et (3) entrainent :

$$\alpha \leq \lim_{n\to\infty} \text{inf } \alpha_n \leq \lim_{n\to\infty} \text{sup } \alpha_n \leq \text{Inf}_{x\in C} f(x) = \alpha$$

D'où :

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$$

3) Soit $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite telle que $x_n \in \Omega_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a :

$$\alpha+M_n \leq f(x_n)+M_n \leq f(x_n)+H_n(x_n) = \alpha_n$$

comme $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ il s'en suit que :

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$$

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} H_n(x_n) = 0$$

Soit maintenant $\tilde{x}$ un point d'adhérence de la suite $(x_n)_n \in \mathbb{N}$

(4) entraine que $\forall \lambda > \alpha \quad \exists N_\lambda \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N_\lambda$ on ait :

$$x_n \in S_\lambda = \{x \in C : f(x) \leq \lambda\}$$

Or f étant s.c.i. S_λ est fermé. Par conséquent

$$\tilde{x} \in S_\lambda \qquad \forall \lambda > \alpha$$

autrement dit :

$$f(\tilde{x}) \leq \lambda \qquad \forall \lambda > \alpha$$

Ce qui entraine :

$$f(\tilde{x}) \leq \alpha$$

Or C étant fermé on a $x \in C$. Par conséquent :

$$f(\tilde{x}) = \alpha$$

D'où le résultat.

———X———

Remarque :

Si on remplace l'hypothèse 2) de (I.1.H) par :

2^{*}) $\exists\ \bar{x} \in \Omega$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} H_n(\bar{x}) = 0$$

Alors tous les résultats de la proposition restent valables.

En effet on montre de la même manière la partie 1) de la proposition et :

$$\alpha \leq \lim_{n} \inf\ \alpha_n$$

Par ailleurs on a :

$$\alpha_n \leq f(\bar{x}) + H_n(\bar{x})$$

D'où par passage à la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \text{Sup}\ \alpha_n \leq f(\bar{x}) + \lim_{n\to\infty} H_n(\bar{x}) = \alpha$$

Ce qui entraine :

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$$

On termine la démonstration de la même manière que la proposition (1.1.1.).

Il est évident que l'hypothèse 2^{*}) n'est pas utilisable, mais il importe de voir que la convergence de $H_n(x)$ vers zéro lorsque $n \to \infty$ n'est pas indispensable pour tout $x \in C$.

Au deuxième chapitre nous allons fabriquer une suite H_n qui vérifie une condition analogue à 2^{*}).

La proposition suivante montre que sous certaines hypothèses on peut modifier l'hypothèse 2) de (I.1.H).

1.1.2. PROPOSITION

Si C est d'intérieur non vide et tel que $\overline{\overset{\circ}{C}} = C$ et si f est continue sur C, alors en remplaçant l'hypothèse 2) de (I.1.H) par

$$2^{**}) \quad \lim_{n\to\infty} H_n(x) \qquad \forall x \in \overset{\circ}{C}$$

tous les résultats de la proposition de (1.1.1. restent valables.

Démonstration :

On montre de la même manière la partie 1) de la proposition de (1.1.1.) et :

$$\alpha \leq \lim_{n\to\infty} \inf \alpha_n$$

Par ailleurs on a :

$$\alpha_n \leq f(x)+H_n(x) \qquad \forall x \in C$$

Par passage la limite on a :

$$\lim_{n\to\infty} \sup \alpha_n \leq f(x) \qquad \forall x \in \overset{\circ}{C}$$

Or les hypothèses faites sur f et C entrainent

$$\inf_{x\in C} f(x) = \inf_{x\in \overset{\circ}{C}} f(x)$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup} \alpha_n \leq \alpha$$

On en déduit alors :

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$$

On termine la démonstration de la même manière que la proposition (1.1.1

COROLLAIRE :

En plus des hypothèses de la proposition (1.1.2.).
On suppose qu'il existe $\gamma > 0$ tel que :

$$H_n(x) \geq \gamma \qquad \forall x \in Fr(C)$$

Alors il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_o$, toutes les solutions du problème (P_n) se trouvent à l'intérieur de C.
Autrement dit :

$$\forall n > n_o \qquad \Omega_n \subset \overset{\circ}{C}$$

Démonstration :

Soit $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite telle que $x_n \in \Omega_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ alors la relation (5) montre que :

$$\lim_{n\to\infty} H_n(x_n) = 0$$

Supposons maintenant que pour tout $n_o \in \mathbb{N}$ il existe $n > n_o$ tel que :

$$\Omega_n \cap Fr(C) \neq \emptyset$$

Il existerait alors une sous-suite $(x_n)_n \in \mathbb{N}_1 \qquad \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ telle que :

$$x_n \in \Omega_n \cap Fr(C) \qquad \forall n \in \mathbb{N}_1$$

Ce qui entrainerait par hypothèse que :

$$H_n(x_n) \geq \gamma \qquad \forall n \in \mathbb{N}_1$$

Or ceci contredit le fait que la suite $H_n(x_n)$ tend vers zéro.
On a donc bien :

$$\exists n_o \in \mathbb{N} \text{ tel que } \Omega_n \subset \overset{o}{C} \text{ pour tout } n > n_o .$$

Remarque :

Ce corollaire entraine qu'à partir d'un n assez grand le problème (P_n) peut être considéré comme un problème de minimisation sans contraintes.

Ce résultat généralise la méthode de pénalités intérieures (voir [2]).

1.2. EXISTENCE ET PROPRIETES DES POINTS D'ADHERENCE DES SOLUTIONS DU PROBLEME (P_n)

Jusqu'à présent nous avons supposé l'existence des points d'adhérence des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $x_n \in \Omega_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Nous allons faire des hypothèses supplémentaires sur les fonctionnelles régularisantes pour assurer l'existence des points d'adhérences des solutions de (P_n).

Comme la proposition du paragraphe (1.1.1.) le montre, tout point d'adhérence d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n \in \Omega_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ est solution de (P). Pour pouvoir affirmer l'existence des points d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ il faut donc supposer que le problème (P) admet des solutions
Désormais on supposera toujours $\Omega \neq \emptyset$.

On fait les hypothèses suivantes sur la suite $H_n \in \Gamma_o(E)$

(I.1.H')

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists M_n \in \mathbb{R}$ tel que :

i) $H_n(x) \geq M_n \qquad \forall x \in C$

ii) $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un réel $r_n \in \mathbb{R}_+$ vérifiant :

$\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty$

et tel que, si on pose $h_n(x) = r_n H_n(x)$ on ait:

i) $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x)$ soit fini pour tout $x \in C$

ii) Les h_n forment une famille équicontinue sur C

3) Les h_n forment une famille uniformément inf-compact sur C, autrement dit :
pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe un compact $K_\lambda \subset E$ tel que :

$\{x \in C : h_n(x) \leq \lambda\} \subset K_\lambda \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

1.2.1. PROPOSITION :

Si α est fini et $\Omega \neq \emptyset$ alors sous les hypothèses (I.1.H') on a :

1) Tous les résultats de la rproposition (1.1.1.)

2) Il existe un compact $K \subset E$ tel que toutes les solutions du problèmes (P_n) soient incluses dans K pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
Autrement dit :

$\Omega_n \subset K \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

ceci entraine que toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n \in \Omega_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ admet obligatoirement des points d'adhérence.

3) Tout point d'adhérence d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n \in \Omega \quad (\forall n \in \mathbb{N})$, minimise la fonctionnelle $h(x) = \lim_{n \to \infty} h_n(x)$, sur l'ensemble des solutions du problème (P).
Autrement dit, si $\tilde{x}$ est un point d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a :

$$h(\tilde{x}) \leq h(z) \quad , \quad \forall z \in \Omega$$

DEMONSTRATION:

1) Les hypothèses (I.1.H') entrainent les hypothèses (I.1.H) par conséquent toutes les conditions de la proposition du paragraphe (1.1.1.) sont réalisées.
On a donc :

i) $\Omega_n \neq \emptyset \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha$

iii) tout point d'adhérence des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $x_n \in \Omega_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, est solution de (P).

2) Soit $u \in \Omega_n$ et $z \in \Omega$, on a :

$$(6) \qquad \alpha_n = f(u) + \frac{1}{r_n} h_n(u) \leq f(z) + \frac{1}{r_n} h_n(z) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Or $z \in \Omega$ entraine que : $f(z) = \alpha \leq f(u)$. Ce qui entraine avec (6) que :

$$(7) \qquad h_n(u) \leq h_n(z) \qquad \forall u \in \Omega_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \Omega$$

Par ailleurs la suite $h_n(z)$ est convergente ; elle est donc bornée. Par conséquent il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$h_n(z) \leq \lambda \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

On en déduit avec (7) que :

$$(8) \qquad h_n(u) \leq \lambda \qquad \forall u \in \Omega_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Alors l'hypothèse 3) de (I.1.H') entraine qu'il existe un compact $K_\lambda \subset E$ tel que :

$$\Omega_n \subset K_\lambda \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Par conséquent toutes les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $x_n \in \Omega_n$ admettent des points d'adhérence.

3) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $x_n \in \Omega_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, la relation (7) entraine :

(7') $\quad h_n(x_n) \leq h_n(z) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall z \in \Omega \quad .$

Soit $\tilde{x}$ un point d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'équicontinuité des h_n et la relation (7') entrainent :

(7") $\quad h(\tilde{x}) \leq h(z) \qquad \forall z \in \Omega$

Ce qui entraine le résultat.

Remarque :

Si on prend les $H_n \in Ap(E, \bar{\mathbb{R}})$ de la forme

$$H_n(x) = \frac{1}{r_n} h(x)$$

Où $h \in Ap(E, \bar{\mathbb{R}})$ est une fonctionnelle s.c.i., inf-compact et bornée inférieuremnet sur C. Alors tous les résultats de la proposition restent valables.

En effet, pour que H_n vérifie les hypothèses (I.1.H') il aurait suffit que la fonctionnelle h soit continue. Or le seul endroit où on se sert de l'équicontinuité est le passage de la relation (7') à (7"). Si h_n ne dépend pas de $n \in \mathbb{N}$, la semi-continuité inférieure de h suffit pour effectuer le passage de (7') à (7").

1.2.2. RAPIDITE DE LA CONVERGENCE

Sous les hypothèses de la proposition du paragraphe 1.2.1. on peut avoir une estimation de la rapidité de la convergence de α_n vers α . En effet pour tout $z \in \Omega$ on a :

$$\alpha_n \leq \alpha + \frac{1}{r_n} h_n(z)$$

D'où :

$$r_n(\alpha_n - \alpha) \leq h_n(z) \qquad \forall z \in \Omega \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

par conséquent :

$$(9) \qquad \limsup_{n \to \infty} r_n(\alpha_n - \alpha) \leq h(z)$$

Ce qui entraine que la suite $r_n(\alpha_n - \alpha)$ reste bornée. On en déduit que la suite $\alpha_n - \alpha$ converge vers zéro au moins aussi rapidement que la suite $\frac{1}{r_n}$.

1.2.3. APPLICATION : Pénalités extérieures

Soit $\Psi \in Ap(E, \bar{\mathbb{R}})$ une fonctionnelle vérifiant

$\Psi(x) = 0$ si $x \in C$

$\Psi(x) > 0$ sinon

On considère le problème suivant :

$$(G) \qquad \beta = \inf_{x \in E} \Psi(x)$$

$$B = \{x \in E : \Psi(x) = \beta\}$$

Il est évident que $\beta = 0$ et $B = C$. Considérons maintenant le problème régularisé :

$$(G_n) \qquad \beta_n = \inf_{x \in C} (\Psi(x) + \frac{1}{r_n} f(x))$$

$$B_n = \{x \in C : \Psi(x) + \frac{1}{r_n} f(x) = \beta_n\}$$

où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite positive tendant vers $(+\infty)$ et f une fonctionnelle s.c.i. bornée inférieurement et inf-compacte sur C.

Alors la proposition précédente entraine :

i) $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$

ii) Tout point d'adhérence des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $x_n \in B_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ est une solution du problème (G), qui réalise le minimum de f dans l'ensemble des solutions du problème (G). Autrement dit si $\tilde{x}$ est un tel point d'adhérence on a :

$$\alpha = \inf_{x \in C} f(x) = f(\tilde{x})$$

On remarque alors que le problème (G_n) qui est un problème obtenu par régularisation à partir du problème (G) est en même temps un problème obtenu par pénalisation à partir du problème (P). Voir [2].

1.3. CAS CONVEXE

La proposition du paragraphe 1.2.1. gagne un intérêt considérable lorsque le problème (P) est convexe ; autrement dit lorsque $f \in \Gamma(E)$ et C est un convexe fermé de E.

1.3.1. PROPOSITION :

Soit $f \in \Gamma_o(E)$ et C un convexe fermé de E.

Si en plus des hypothèses de la proposition du paragraphe 1.2.1. on suppose que les fonctionnelles H_n et h sont strictement convexes. Alors on a :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le problème (P_n) admet une solution unique $x_n \in C$.

2) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une solution du problème (P).

Démonstration :

1) Evident, en vertu de la stricte convexité des fonctionnelles $f + \frac{1}{r_n} h_n$

2) La fonctionnelle $f \in \Gamma(E)$ et l'ensemble C étant convexes il s'en suit que l'ensemble des solutions du problème (P) c'est-à-dire Ω est convexe. Par ailleurs la proposition (1.2.1.) montre que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet des point d'adhérence qui d'une part sont des solutions de (P) et d'autre part réalisent le minimum de h sur Ω . Or h étant strictement convexe et Ω convexe il s'en suit que le minimum de h sur Ω est atteint au plus en un point unique, d'où on déduit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet au plus un seul point d'adhérence. Par ailleurs la proposition précédente montre qu'il existe un compact K contenant toute la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ce qui entraine que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une solution du problème (P).

REMARQUE :

Dans ce chapitre à aucun moment on n'a précisé la topologie de l'espace E. Par conséquent tous les résultats obtenus jusqu'à présent sont valables quelle que soit la topologie choisie sur E. Toutefois, à cause de l'hypothèse d'inf-compacité des H_n, sont particulièrement intéressants les cas :

1) E est de dimension finie.

2) E est un espace en dualité avec un espace E^* et les H_n sont faiblement inf-compacts.

CHAPITRE 2

REGULARISATION PAR TRANSLATION

Lorsque le problème (P) est un problème convexe c'est-à-dire lorsque C est un convexe fermé d'un espace vectoriel topologique et $f \in \Gamma(E)$, (fonctionnelle convexe et s.c.i. voir [1]), un des plus grands intérêts de recourir à la méthode de régularisation réside — comme le montre la proposition du paragraphe 1.3.1. — dans le fait de choisir les fonctionnelles H_n strictement convexes (Pour assurer l'unicité des solutions du problème régularisé, pour appliquer une méthode nécessitant cette propriété e.t.c.). Or l'hypothèse

$$\lim_{n\to\infty} H_n(x) = 0 \quad , \quad \forall x \in C$$

qui était fondamentale au chapitre 1 rend négligeable la stricte convexité pour les $n \in \mathbb{N}$ assez grands.

Par ailleurs comme le suggère la remarque du paragraphe (1.1.1.) la convergence de la suite $H_n(x)$ vers zéro n'est pas indispensable pour tout $x \in C$.

L'objet de ce chapitre sera de fabriquer une suite de fonctionnelle $H_n \in \Gamma_o(E)$ (*) de manière a réaliser une condition analogue à celle

---

(*) On désigne par $\Gamma_o(E)$ l'ensemble des fonctionnelles convexe et semi continue inférieurement à valeurs dans $\mathbb{R} \vee \{+\infty\}$ n'étant pas identique à $+\infty$.

mentionnée dans le remarque du paragraphe (1.1.1.).

On considère deux espaces vectoriels topologiques localement convexes E et E^* en dualité.

2.1. REGULARISATION PAR TRANSLATION, SIMPLES

Dans cette section on fixe une topologie θ compatible avec la dualité (E,E^*). Toutes les hypothèses de continuité ou d'inf-compacité qu'on fera dans cette section seront comprises au sens de la topologie θ

On considère une fonctionnelle $H \in \Gamma_o(E)$ vérifiant :

$(I.2.H_1)$

i) dom H = E et H continue partout

ii) $H(x) \geq 0 \quad \forall x \in E$, $H(x) = 0 \iff x = 0$

iii) $\partial H(0) = \{0\}$ (*)

iv) H strictement convexe

On considère le problème :

$$(P) \qquad \alpha = \inf_{x \in E} f(x)$$

$$\Omega = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$$

où $f \in \Gamma_o(E)$ (α est supposé fini).

Soit $z \in E$ on considère le problème

$$(P_z) \qquad \alpha_z = \inf_{x \in E}(f(x)+H(x-z))$$

Si l'une des deux fonctionnelles f ou H est inf-compacte le problème (P_z) admet une solution unique pour tout $z \in E$.

Dans la suite tant qu'il ne sera pas précisé nous supposerons que l'une des deux fonctionnelles est inf-compacte.

(*) On désigne par $\partial H(x_o)$ une partie de E^* telle que $\forall y \in \partial H(x_o)$ on ait :

$$H(x) \geq H(x_o) + \langle y_o, x-x_o \rangle \qquad \forall x \in E$$

Dans ces conditions on définie l'application

$$U : E \to E$$

qui à tout élément $z \in E$ fait correspondre la solution (unique) du problème (P_z).
C'est-à-dire :

$$U(z) = x$$

si et seulement si

$$f(x) - H(x-z) = \inf_{u \in E} (f(u) + H(u-z))$$

Remarque :

Si E est un espace de Hilbert et la fonctionnelle H est telle que :

$$H(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2$$

alors U est la fonctionnelle prox_f définie par Moreau, voir [4] .

Notations :

- Nous désignerons par f^* la fonctionnelle polaire de f (*)
- Nous noterons H_{-z} la fonctionnelle H translatée par -z

(10) $$H_{-z}(x) = H(x-z) \quad , \quad \forall x,z \in E .$$

2.1.1. PROPOSITION :

Si α est fini et si les hypothèses $(I.2.H_1)$ sont vérifiées alors les deux assertions suivantes sont équivalentes

1) $\bar{x} \in \Omega$

2) $U(\bar{x}) = \bar{x}$

(*) $f^*(y) = \sup_{x \in E} < y,x > -f(x) \qquad y \in E^*$

Démonstration :

1) => 2)

On a par hypothèse

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \qquad \forall x \in E$$

H étant une fonctionnelle a valeurs dans $\mathbb{R}_+$, il s'ens suit que :

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) + H(x-\bar{x}) \quad , \quad \forall x \in E$$

2) => 1)

On a :

$$f(\bar{x}) \leq f(x) + H(x-\bar{x}) \quad , \quad \forall x \in E$$

Par conséquent le sous différentiel au point $\bar{x}$ de la fonctionnelle $f + H_{-\bar{x}}$ contient zéro. Autrement dit :

$$(11) \qquad 0 \in \partial(f+H_{-\bar{x}})(\bar{x})$$

H étant supposé continue on peut appliquer la loi d'addition des sous différentiels (*) (voir [1]).

$$(12) \qquad \partial(f+H_{-\bar{x}}) = \partial f(\bar{x}) + H_{-\bar{x}}(\bar{x}) = \partial f(\bar{x}) + \partial H(\bar{x}-\bar{x})$$

Or par hypothèse on a $\partial H(0) = (0)$. Alors (11) et (12) entrainent que :

$$(13) \qquad 0 \in \partial f(\bar{x})$$

Ce qui, par définition du sous différentiel entraine :

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \qquad \forall x \in E$$

D'où le résultat.

(*) Loi d'addition des sous différentiels de deux fonctionnelles convexes. Soient $f_1, f_2 \in \Gamma_o(E)$. S'il existe un $x_o \in E$ tel que $f_1(x_o)$ et $f_2(x_o)$ soient finis et l'une des deux fonctionnelles continue en x_o alors on a

$$\partial(f_1+f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x) \quad \forall x \in E$$

2.1.2.

La proposition précédente montre que le problème (P) est équivalent au problème de recherche des points fixes de l'application U.

Dans toute la suite de ce chapitre nous étudierons les propriétés de convergence de la suite :

$$x_{n+1} = U(x_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{avec} \quad x_o \in E \quad \text{quelconque},$$

pour trouver un point fixe de l'application U.

Dans le cas particulier où E est un espace de Hilbert et la fonctionnelle H est de la forme $H(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$. L'autopolarité (*) de la fonctionnelle $\frac{1}{2}\|x\|$ permet de montrer que l'application U correspondante nommée fonction $prox_f$ par JJ. MOREAU [4] est pseudo-contractante (**).

Dans sa thèse B. MARTINET a démontré le théorème suivant :

. Si V est une application pseudo contractante de C dans C (C étant un convexe borné d'un espace de Hilbert) alors toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construite à partir de $x_1 \in C$ par les itérations : $x_{n+1} = V(x_n)$, converge faiblement vers un point fixe de V.

Ce qui entraine que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenu par les itérations

$x_{n+1} = prox_f(x_n)$

converge faiblement vers un point fixe de l'application $prox_f$.

(*) Si E est un espace de Hilbert une fonctionnelle f est dite autopolaire si on a $f^* = f$. On montre que la seul fonctionnelle autopolaire est $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$.

(**) Une application V : $E \to E$ (où E est un espace de Banach) est dite pseudo contractante si :

$$\|V(x)-V(y)\|^2 \leq \|x-y\|^2 - \|(V(x)-x)-(V(y)-y)\|^2 \quad , \quad \forall x,y \in E$$

Nous allons étudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue par $x_{n+1} = U(x_n)$ sans recourir à la notion de contraction ni de pseudo contraction, en nous servant seulement des éléments de l'analyse convexe.

Nous allons néanmoins donner dans la section (2.4.) une propriété analogue à la pseudo contraction dans le cas général où E est un espace de Banach et la fonctionnelle H vérifie certaines hypothèses supplémentaires. Mais nous n'avons pu obtenir la pseudo contraction, elle même, dans ce cas général. Il semble donc que cette propriété de la fonctionnelle prox_f provient essentiellement de l'auto-polarité de la fonctionnelle $\frac{1}{2}\|x\|^2$ lorsque E est un espace de Hilbert.

On considère la suite des problèmes :

$$(P_n) \qquad \alpha_n = \inf_{x \in E} (f(x) + H(x - x_{n-1}))$$

où x_{n-1} est la solution du problème (P_{n-1}).

On prendra $x_o \in E$ initial quelconque pour définir le problème (P_1)) .

Il est évident que si x_n est la solution du problème (P_n) on a :

$$U(x_{n-1}) = x_n$$

2.1.3. PROPOSITION :

Si en plus des hypothèses $(I.2.H_1)$ on suppose que f est inf-compact pour la topologie (θ). Alors pour un $x_o \in E$ initial quelconque la suite des itérations $x_n = U(x_{n-1})$ vérifie l'une des deux assertions suivantes :

Soit 1) Il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_o+1} = x_{n_o}$ et alors on a $x_{n_o} \in \Omega$

Soit 2) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet des points d'adhérence (pour la topologie θ) qui sont tous des solutions du problème (P) (Par conséquent les points fixes de U) et on a :

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$$

Démonstration :

1) S'il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_o+1} = x_{n_o}$ on a $U(x_{n_o}) = x_{n_o}$;

par conséquent x_{n_o} est un point fixe de U, ce qui entraine $x_{n_o} \in \Omega$

(voir proposition 2.1.1.).

2) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_{n+1} \neq x_n$ alors par définition on a :

(14) $\quad f(x_{n+1})+H(x_{n+1}-x_n) \leq f(x)+H(x-x_n) \quad , \quad \forall x \in E \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$

pour $x = x_n$ (14) devient :

(14') $\quad f(x_{n+1})+H(x_{n+1}-x_n) \leq f(x_n) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Comme $H(x_{n+1}-x_n) > 0$ pour $x_{n+1} \neq x_n$, on en déduit

(15) $\quad f(x_{n+1}) < f(x_n) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$

La suite $f(x_n)$ étant donc décroissante et bornée inférieurement par α , elle converge vers un $\alpha^* \geq \alpha$

(16) $\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha^* \geq \alpha$

La relation (14') entraine alors

(17) $\quad \lim_{n\to\infty} H(x_{n+1}-x_n) = 0$

par conséquent on a

(18) $\quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha^*$

On va montrer que $\alpha^* = \alpha$

La décroissance de la suite $f(x_n)$ entraine :

(19) $\quad x_n \in \{x \in E : f(x) \leq f(x_o)\}$

Alors l'inf-compacité de f entraine que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se trouve dans un compact. Par conséquent elle admet des points d'adhérence

Par ailleurs la relation (18) entraine :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N}$ tel que

(20) $\qquad \alpha^* - \varepsilon < \alpha_n \qquad \forall n > m$

Par conséquent on a :

$$\alpha^* - \varepsilon < \alpha_n \leq f(x)+H(x-x_{n-1}) \quad \forall x \in E \ , \ \forall n > m$$

d'où :

(21) $\qquad \alpha^* - \varepsilon \leq \underset{n>m}{\text{Inf}} (f(x)+H(x-x_{n-1})) \qquad \forall x \in E$

Soit $\tilde{x}$ un point d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ H étant continue (21) entraine :

(22) $\qquad \alpha^* - \varepsilon \leq f(x)+H(x-\tilde{x}) \qquad \forall x \in E \ , \ \forall \varepsilon > 0$

On en déduit

(23) $\qquad \alpha^* \leq f(x)+H(x-\tilde{x})$

Par ailleurs un raisonnement analogue à celui de la proposition (1.1.1.) montre que la relation (16) entraine avec la semi continuité inférieure de f que :

(24) $\qquad f(\tilde{x}) \leq \alpha^*$

On en déduit avec (23) que :

(25) $\qquad f(\tilde{x}) \leq f(x)+H(x-\tilde{x}) \qquad \forall x \in E$

Ce qui entraine $U(\tilde{x}) = \tilde{x}$ par conséquent on a :

$$\tilde{x} \in \Omega \qquad \text{et} \qquad \alpha^* = \alpha$$

D'où le résultat.

Remarque :

Lorsque E est un espace de dimension finie la topologie la plus faible et la topologie la plus fortes sur E compatibles avec la dualité coïncident. Par conséquent les hypothèses d'inf-compacité de f et de continuité de H pour une même topologie, ne sont pas contraignantes.

Or lorsque la dimension de E est infinie, supposer l'inf-compacité de f et la continuité de H pour une même topologie, est une hypothèse très contraignante.

En effet, si l'on considère la topologie la plus forte sur E compatible avec la dualité (E,E^*), l'hypothèse d'inf-compacité sur f est une hypothèse trop forte. Par contre, si on considère la topologie la plus faible sur E, compatible avec la dualité, l'hypothèse de continuité de H restreint considérablement le choix des fonctionnelles H strictement convexe

Dans la section (2.3.) nous verrons qu'en faisant des hypothèses supplémentaires sur H, que l'on peut prendre la fonctionnelle f faiblement inf-compact et H fortement continue ce qui est le cas topologiquement optimal.

2.2. PROPRIETES DE L'UNIFORME CONVEXITE

DEFINITION :

Soit E un espace de Banach. Une fonctionnelle $H \in \Gamma(E)$ est dite uniformément convexe s'il existe une application $\delta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ non décroissante s'annulent seulement en zéro et vérifiant :

$$(26) \qquad H\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{H(x_1)+H(x_2)}{2} - \delta(\|x_1-x_2\|) \quad , \quad \forall x_1,x_2 \in E$$

On appelle δ la fonctionnelle (U.C.) (uniforme convexité) de H.

2.2.1. PROPOSITION :

Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

Soit 1) $H \in Ap(E,\bar{\mathbb{R}})$ est uniformément convexe.

Soit 2) Pour tout $\tau > 0$ on a :

$$\inf_{\substack{x_1,x_2 \in E \\ \|x_1-x_2\|>\tau}} \left(\frac{H(x_1)+H(x_2)}{2} - H\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right) > 0$$

Démonstration :

1) => 2) :

D'après la définition de l'uniforme convexité et de la non décroissance de δ on a :

$$\inf_{\substack{x_1,x_2 \\ \|x_1-x_2\| \geq \tau}} \left(\frac{H(x_1)+H(x_2)}{2} - H\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right) \geq \inf_{\substack{x_1,x_2 \\ \|x_1-x_2\| \geq \tau}} \delta\left(\|x_1-x_2\|\right) = \delta(\tau) > 0$$

D'où le résultat.

2) => 1) : On pose :

$$\delta(\tau) = \inf_{\substack{x_1,x_2 \in E \\ \|x_1-x_2\| > \tau}} \left(\frac{H(x_1)+H(x_2)}{2} - H\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)\right)$$

On doit montrer que la fonctionnelle δ ainsi définie vérifie :

i) $\delta(\tau) > 0$, $\forall \tau > 0$, $\delta(0) = 0$

ii) δ est non décroissante.

i) s'obtient par hypothèse

ii) Soient $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que $\tau_1 \leq \tau_2$

On pose :

$$X_1 = \{(x_1,x_2) \in E \times E \quad : \quad \|x_1-x_2\| \geq \tau_1\}$$
$$X_2 = (x_1,x_2) \in E \times E \quad : \quad \|x_1-x_2\| \geq \tau_2\}$$

On a visiblement : $X_2 \subset X_1$

Or $\delta(\tau_1)$ et $\delta(\tau_2)$ s'obtiennent en minimisant une même expression respectivement sur X_1 et X_2, ce qui entraine :

$$\delta(\tau_2) \geq \delta(\tau_1)$$

D'où le résultat.

Ce résultat montre qu'on peut prendre comme définition de l'uniforme convexité la deuxième assertion de la proposition (2.2.1.).

Il est évident que lorsqu'une fonctionnelle convexe est uniformément convexe la fonctionnelle (U.C.) correspondante n'est pas unique En effet :

Si δ est une fonctionnelle (U.C.) de H, alors toute fonctionnelle $\delta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ non décroissante s'annulant seulement en zéro et telle que $\overset{\vee}{\delta} \leq \delta$ est aussi (U.C.) de H.

Si H est une fonctionnelle uniformément convexe la fonctionnelle $\delta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ obtenue par :

$$\delta(\tau) = \inf_{\substack{x_1,x_2 \\ \|x_1-x_2\| > \tau}} \left(\frac{H(x_1)+H(x_2)}{2} - H\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$$

est par définition la plus grande fonctionnelle (U.C.) de H. Nous l'appellerons la fonctionnelle (U.C.) optimale de H. Nous la notons δ_{opt} .

Remarque :

A toute fonctionnelle H convexe on peut associer une fonctionnelle :

$$(27) \qquad \delta_{opt} = \inf_{\substack{x_1,x_2 \\ \|x_1-x_2\|>\tau}} \left(\frac{H(x_1)+H(x_2)}{2} - H\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$$

Dans ce cas on peut donner comme définition de l'uniforme convexité :

. Si la fonctionnelle δ_{opt} associée à une fonctionnelle convexe H vérifie :

$$\delta_{opt}(\tau) > 0 \qquad \forall\, \tau > 0$$

Alors H est uniformément convexe.

2.2.2. PROPOSITION :

Si H est une fonctionnelle uniformément convexe alors la fonctionnelle δ_{opt} associée est vérifie :

$$\delta_{opt}(2\tau) \geq 4\delta_{opt}(\tau).$$

Démonstration :

Soient $x,x' \in E$ tels que :

$$\|x-x'\| = 2\tau$$

en posant $x = x_o$, $x' = x_4$ et

$$x_i = \frac{(4-i)x+ix'}{4} \qquad i=0,1,2,3,4$$

on découpe le segment $\overline{xx'}$ en quatre parties égales.

On a :

$$\frac{x_{i+2}+x_i}{2} = x_{i+1} \qquad i=0,1,2 \tag{28}$$

$$\|x_{i+2}-x_i\| = \tau \qquad i=0,1,2 \tag{29}$$

Les relations (28) et (29) entrainent avec la définition de δ_{opt}

$$\frac{H(x_{i+2})+H(x_i)}{2} - H(x_{i+1}) \geq \delta_{opt}(\tau) \qquad i=0,1,2 \tag{30}$$

En additionnant la relation (30) pour i=0 , i=1 , i=2 :

On obtient :

$$\frac{H(x_o)+H(x_4)-[H(x_1)+H(x_3)]}{2} \geq 3\ \delta_{opt}(\tau)$$

Or on a :

$$\frac{H(x_1)+H(x_3)}{2} \geq H(x_2) + \delta_{opt}(\tau)$$

ce qui entraine :

$$\frac{H(x_o)+H(x_4)}{2} - H(x_2) \geq 4\delta_{opt}(\tau)$$

ce qui n'est autre que :

$$\frac{H(x)+H(x')}{2} - H\left(\frac{x+x'}{2}\right) \geq 4\delta_{opt}(\tau) \qquad \forall x,x' \in E \text{ tels que } \|x-x'\| \geq 2\tau$$

D'où le résultat.

Ce résultat nous montre, lorsqu'une fonctionnelle $H \in \Gamma(E)$ est uniformément convexe la fonctionnelle (U.C.) de H peut être choisie strictement croissante.

2.2.3. PROPOSITION :

Si $H \in \Gamma(E)$ est une fonctionnelle uniformément convexe et si $y_o \in \partial H(x_o)$. Alors la fonctionnelle (U.C.) de H vérifie

$$(31) \qquad H(x) \geq H(x_o) + \langle y_o, x-x_o \rangle + 2 \sum_{p=0}^{n} 2^p \, \delta\left(\frac{\|x-x_o\|}{2^p}\right) \quad , \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}$$

et par conséquent la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \, \delta\left(\frac{\tau}{2^n}\right)$$

est convergente pour tout $\tau \in \mathbb{R}_+$ plus petit que le diamètre de dom (H).

Démonstration :

Par définition de l'uniforme convexité on a :

$$(32) \qquad \frac{H(x)+H(x_o)}{2} - \delta(\|x-x_o\|) \geq H\left(\frac{x+x_o}{2}\right) \quad , \qquad \forall x \in E$$

Par ailleurs si $y_o \in \partial H(x_o)$ on a :

$$(33) \qquad H\left(\frac{x+x_o}{2}\right) \geq H(x_o) + \left\langle y_o, \frac{x-x_o}{2} \right\rangle \qquad \forall x \in E$$

De (32) et (33) on déduit :

$$(34) \qquad H(x) \geq H(x_o) + \langle y_o, x-x_o \rangle + 2\delta(\|x-x_o\|) \qquad \forall x \in E$$

Ce qui montre que le résultat de la proposition est vrai pour n = 0.
Supposons le vrai pour n = m.
On suppose donc :

$$(35) \qquad H(x) \geq H(x_o) + \langle y_o, x-x_o \rangle + 2 \sum_{p=0}^{m} \delta\left(\frac{\|x-x_o\|}{2^p}\right) \qquad \forall x \in E$$

En prenant $\frac{x+x_o}{2}$ au lieu de x en (35) il vient :

$$(35') \qquad H\left(\frac{x+x_o}{2}\right) \geq H(x_o) + \left\langle y_o, \frac{x-x_o}{2} \right\rangle + 2 \sum_{p=0}^{m} \delta\left(\frac{\|x-x_o\|}{2^{p+1}}\right)$$

Alors la relation (32) entraine :

$$H(x) \geq H(x_o) + \langle y_o, x-x_o \rangle + 2\delta(\|x-x_o\|) + 4 \sum_{p=0}^{m} \delta\left(\frac{\|x-x_o\|}{2^{p+1}}\right)$$

Ce qui n'est autre que :

$$H(x) \geq H(x_o) + \langle y_o, x-x_o \rangle + 2 \sum_{p=0}^{m+1} \delta\left(\frac{\|x-x_o\|}{2^{p}}\right) \qquad \forall x \in E$$

D'où le résultat.

2.3. AMELIORATION DU PROCEDE DE REGULARISATION PAR TRANSLATION

Soit E un espace de Banach réflexif. On considère une fonctionnelle $H \in \Gamma_o(E)$ strictement convexe vérifiant :

$(I.2.H_2)$

1) dom H = E et H continue partout pour la topologie de la norme.

2) $H(x) \geq 0$, $\forall x \in E$ et
$H(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

3) Pour tout $x \in E$ le sous-différentiel de H en x est réduit à un seul point . On pose :

$$\partial H(x) = H'(x)$$

4) $H'(0) = 0$ et H' est continue en zéro pour les topologies les plus fortes sur E et E^* compatibles avec la dualité.

5) Si pour une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} H(w_n) = 0$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\| = 0 .$$

Considérons de nouveau l'application $U : E \to E$ définie en (2.1. Nous allons démontrer le résultat suivant :

2.3.1. PROPOSITION

Si α est fini, f inf-compacte pour la topologie la plus faible de E compatible avec la dualité (E,E^*) et si H vérifie les hypothèses $(I.2.H_2)$, alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$U(x_n) = x_{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}$$

vérifie l'une des deux assertions suivantes :

Soit 1) Il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que :

$$x_{n_o+1} = x_{n_o}$$

et alors $x_{n_o} \in \Omega$ (voir paragraphe 2.1.1.)

Soit 2) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et on a :

i) $$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1}-x_n\| = 0$$

ii) $$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha ,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$$

(Où $\alpha_n = \inf_{x\in E} (f(x)+H(x-x_{n-1}))$)

iii) Tout point d'adhérence faible de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est solution du problème (P) défini en (2.1.)

Démonstration :

1) Se démontre de la même manière que la proposition du paragraphe (2.1.3.).

2) On démontre de la même manière que la proposition du paragraphe (2.1.3.) que :

a) $\lim f(x_n) = \alpha^* \geq \alpha$

b) $\lim_{n\to\infty} H(x_{n+1}-x_n) = 0$

c) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha^*$

Sous l'hypothèse 5) de $(I.2.H_2)$, b) entraine

(36) $\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1}-x_n\| = 0$

Soit maintenant $x_{n+1} = U(x_n)$; par définition on a :

$$f(x_{n+1}) + H(x_{n+1}-x_n) \leq f(x) + H(x-x_n)$$

donc :

$$0 \in \partial(f+H_{-x_n})(x_{n+1}) \quad \text{(Voir (2.1.))}$$

H étant continu on peut appliquer la loi d'addition des sous différentiels (voir (*) au paragraphe 2.1.1.).
On a donc :

(37) $0 \in \partial f(x_{n+1}) + H'(x_{n+1}-x_n)$, $\forall x \in \mathbb{N}$.

Ce qui entraine qu'il existe $y_{n+1} \in E^*$ tel que :

(38) $y_{n+1} \in \partial f(x_{n+1})$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(39) $y_{n+1} = -H'(x_{n+1}-x_n)$

(36 entraine avec la continuité de H' en zéro (pour les topologies fortes) que :

(40) $\lim_{n\to\infty} \|y_{n+1}\| = 0$

Par ailleurs (38) entraine par définition

$$(41) \qquad f(x_{n+1}) = < x_{n+1}, y_{n+1} > - f^*(y_{n+1})$$

(où f^* désigne la polaire de f).

On remarque de la même manière que dans la démonstration de la proposition (2.1.3) que la suite $f(x_n)$ est décroissante. On a donc :

$$x_n \in \{x \in E : f(x) \leq f(x_o)\}$$

où x_o est l'élément initial (arbitraire) de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
L'inf-compacité faible de f entraine alors que la suite x_n est bornée. Alors (40) entraine :

$$\lim_{n \to \infty} < x_{n+1}, y_{n+1} > = 0$$

On rappelle le théorème :

THEOREME :

> Une fonctionnelle $f \in \Gamma_o(E)$ est faiblement inf-compacte si est seulement si sa polaire f^* est finie et continue fortement en $0 \in E^*$. (voir [1]) .

Alors f étant faiblement inf-compacte, f^* est continue en zéro pour la topologie de la norme de E^*. Alors (40) entraine :

$$\lim_{n \to \infty} f^*(y_{n+1}) = f^*(0)$$

On déduit de (41) que :

$$(42) \qquad \lim_{n \to \infty} f(x_{n+1}) = - f^*(0)$$

Or par définition de la fonctionnelle polaire on a :

$$f^*(0) = \sup_{x \in E} - f(x) = - \inf f(x) = - \alpha$$

Donc on a bien :

$$(43) \qquad \lim_{n \to \infty} f(x_{n+1}) = \alpha$$

On termine aisément la démonstration.

Remarques :

1) L'hypothèse 5) de $(I.2.H_2)$ est réalisée par exemple si H est uniformément convexe.

En effet :

Soit $(w_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite telle que :

$$\lim_{n\to\infty} H(w_n) = 0$$

Comme $H(0) = 0$ et $H'(0) = 0$ la proposition (2.2.3.) entraine :

$$H(w_n) \geq 2\delta(\|w_n\|) \geq 0$$

où δ est une fonctionnelle (U.C.) de H.

On en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \delta(\|w_n\|) = 0$$

ce qui entraine compte tenu des propriétés de δ que :

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\| = 0$$

2) Si f est strictement convexe alors la suite $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ telle que :

$$U(x_n) = x_{n+1}$$

converge faiblement vers la solution (unique dans ce cas) de (P).

Si en plus f est uniformément convexe, alors la suite $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ converge fortement vers l'unique solution de (P)

En effet,

Soit γ une fonctionnelle (U.C.) de f et $\bar{x}$ la solution du rproblème (P).

On a :

$$0 \in \partial f(\bar{x}) .$$

La proposition (2.3.2.) entraine alors :

$$f(x_n) \geq f(\bar{x}) + 2\gamma(\|x_n-\bar{x}\|) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

D'où :

$$f(x_n) - \alpha \geq 2\gamma(\|x_n-\bar{x}\|) \geq 0$$

Ce qui entraine avec la relation (43) que :

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(\|x_n-\bar{x}\|) = 0$$

D'où :

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n-\bar{x}\| = 0$$

2.4. QUELQUES PROPRIETES DE L'APPLICATION U : E → E DEFINIE EN 2.1.

2.4.1. CONTINUITE DE U

Si en plus des hypothèses (I.2.H_2) on suppose que H est uniformément continue et uniformément convexe, alors l'application U définie en 2.1. est aussi uniformément continue.

Démonstration :

Soient $z_1, z_2 \in E$ on pose :

$$x_i = U(z_i) \qquad i=1,2,...$$

On a par définition :

$$0 \in \partial(f+H_{-z_i}) \qquad i=1,2,...$$

Alors la proposition 2.2.3. entraine :

(44) $$f(x_2) + H(x_2-z_1) \geq f(x_1) + H(x_1-z_1) + 2\delta(\|x_1-x_2\|)$$

(45) $$f(x_1) + H(x_1-z_2) \geq f(x_2) + H(x_2-z_2) + 2\delta(\|x_1-x_2\|)$$

(où δ est une fonctionnelle (U.C.) de H).

D'où :

$$(46) \qquad H(x_2-z_1) - H(x_2-z_2) + H(x_1-z_2) - H(x_1- z_1) \geq 4\delta(\|x_1-x_2\|)$$

Soit $\varepsilon > 0$ on considère $\delta(\varepsilon) > 0$; H étant uniformément continue il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $z_1, z_2 \in E$ tels que :

$$\|z_1-z_2\| < \eta$$

on ait :

$$|H(x_2-z_1) - H(x_2-z_2)| < 2\delta(\varepsilon)$$
$$|H(x_1-z_2) - H(x_1-z_1)| < 2\delta(\varepsilon)$$

D'où on déduit avec (46) que :

$$\delta(\|x_1-x_2\|) < \delta(\varepsilon)$$

δ étant croissante il vient :

$$\|x_1-x_2\| < \varepsilon$$

D'où le résultat .

Nous allons généraliser le résultat (pseudo contraction) relative à la fonctionnelle prox_f (voir paragraphe 2.1.2.).

2.4.2. PROPOSITION :

Si en plus des hypothèses (I.2.H_2) H est uniformément convexe et H' lipschitzienne, alors on a $\forall z_1, z_2 \in E$:

$$(47) \qquad \Delta(\|U(z_1)-U(z_2)\|) \leq \frac{1}{4}\mu\|z_1-z_2\|^2 - \Delta(\|(U(z_1)-z_1)-(U(z_2)-z_2)\|)$$

Où :

1) $\Delta(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{\tau}{2^n}\right)$ δ étant une fonctionnelle (U.C.) de H

2) $\mu \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\|H'(x)-H'(x')\| \leq \mu\|x-y\| \qquad \forall x,x' \in E$$

Démonstration :

Le fait que H' soit lipschitzienne entraine :

$$(48) \qquad H(x_2)-H(x_1) - < H'(x_1),x_2-x_1 > \leq \frac{1}{2}\mu\|x_2-x_1\|^2 \qquad \forall x_1,x_2 \in E$$

En effet :
On écrit la formule de Taylor sous forme intégrale

$$(49) \qquad H(x_2)-H(x_1) = \int_0^1 < H'(x_1+\tau(x_2-x_1)),x_2-x_1 > d\tau$$

En soustrayant $< H'(x_1),x_2-x_1 >$ de chaque côté de l'égalité, il vient :

$$H(x_2)-H(x_1)-< H'(x_1),x_2-x_1 > = \int_0^1 < H'(x_1+\tau(x_2-x_1))-H'(x_1),x_2-x_1 > d\tau$$

D'où :

$$H(x_2)-H(x_1) - < H'(x_1),x_2-x_1 > \leq \int_0^1 \mu\tau\|x_2-x_1\|^2 d\tau = \frac{1}{2}\mu\|x_2-x_1\|^2$$

Soient maintenant $z_1,z_2 \in E$. On pose :

$$x_i = U(z_i) \qquad i=1,2,\ldots$$

La proposition (2.2.3.) entraine :

$$(50) \quad H(x_2-z_2) \geq H(x_1-z_1)+ <H'(x_1-z_1), x_2-z_2-(x_1-z_1)>+2\Delta(\|(x_1-z_1)-(x_2-z_2)\|)$$

$$(51) \quad H(x_1-z_1) \geq H(x_2-z_2)+ <H'(x_2-z_2),(x_1-z_1)-(x_2-z_2)>+2\Delta(\|(x_1-z_1)-(x_2-z_2)\|)$$

D'où :

$$(52) \quad < H'(x_1-z_1)-H'(x_2-z_2),x_2-z_2-(x_1-z_1) > \leq -4\Delta(\|x_1-z_1-(x_2-z_2)\|)$$

Par ailleurs la relation (48) entraine :

$$(53) \quad H(x_2-z_1)-H(x_2-z_2) \leq <H'(x_2-z_2),z_2-z_1> + \frac{1}{2}\mu\|z_1-z_2\|^2$$

$$(54) \quad H(x_1-z_2)-H(x_1-z_1) \leq <H'(x_1-z_1),z_1-z_2> + \frac{1}{2}\mu\|z_1-z_2\|^2$$

La proposition 2.2.3. entraine que l'inégalité (46) peut s'écrire :

$$(46') \qquad H(x_2-z_1)-H(x_2-z_2)+H(x_1-z_2)-H(x_1-z_1) \geq 4\Delta(\|x_1-x_2\|)$$

Alors en additionnant (53) avec (54) et en comparant avec (46') il vient :

$$(55)\quad 4\Delta(\|x_1-x_2\|) \leq \langle H'(x_1-z_1)-H'(x_2-z_2),z_1-z_2\rangle + \mu\|z_1-z_2\|^2$$

Par ailleurs on a :

$$0 \in \partial f(x_1) + H'(x_1-z_1)$$
$$0 \in \partial f(x_2) + H'(x_1-z_2)$$

Soient :

$$y_1 \in \partial f(x_1)\ ,\ y_2 \in \partial f(x_2)$$

tels que :

$$y_1 + H'(x_1-z_1) = 0$$
$$y_2 + H'(x_2-z_2) = 0$$

La convexité de f entraine :

$$\langle y_2-y_1,x_2-x_1\rangle \geq 0$$

On en déduit :

$$(56)\qquad \langle H'(x_1-z_1) - H'(x_2-z_2),x_2-x_1\rangle \geq 0$$

Alors en additionnant (56) à (55) membre par membre il vient :

$$(57)\quad 4\Delta(\|x_1-x_2\|) \leq \langle H'(x_1-z_1)-H'(x_2-z_2),x_2-x_1-(z_2-z_1)\rangle + \mu\|z_1-z_2\|^2$$

Alors (57) entraine avec (52) :

$$4\Delta(\|x_1-x_2\|) \leq \mu\|z_1-z_2\|^2 - 4\Delta(\|(x_1-z_1)-(x_2-z_2)\|)$$

Ce qui entraine le résultat.

DEUXIEME PARTIE

REGULARISATION DES PROBLEMES DE MINI-MAX

INTRODUCTION :

Après avoir étudié les méthodes de régularisation des problèmes d'optimisation, nous nous proposons d'étudier de telles méthodes dans les problèmes de recherche des points de selle des fonctionnelles convexes-concaves. (*)

Au troisième chapitre nous donnons un bref résumé de la théorie de perturbations dans les problèmes d'optimisation, ainsi que sur la dualité de deux problèmes d'optimisation liés par une fonctionnelle convexe-concave.

Au quatrième chapitre nous étudierons des méthodes de régularisation relatives a des problèmes de recherche des points de selle des fonct fonctionnelles convexes-concaves.

(*) Voir notations et définitions.

CHAPITRE 3

GENERALITES SUR LA THEORIE DE PERTURBATIONS

3. Dans ce chapitre nous nous contentons de faire quelques rappels sur la théorie des perturbations (voir [1]). Nous allons souvent énoncer les résultats fondamentaux de cette théorie sans donner de démonstration, notre but étant de rendre clair le rapport existant entre les problèmes d'optimisation et les problèmes de mini-max. Pour une étude détaillée on pourrait consulter [1].

3.1. PERTURBATIONS

Soient E et E^* deux espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés (e.ν.t.ℓ.c.s.) en dualité par rapport à la fonctionnelle bilinéaire

$$[x,y] \in E \times E^* \to \langle y,x \rangle \in \mathbb{R}$$

Soit une fonctionnelle $f \in \Gamma_o(E)$. On considère le problème suivant

$$(P) \qquad \alpha = \inf_{x \in E} f(x)$$

Pour lequel on suppose que α est finie.

On pose

$$\Omega_{(P)} = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$$

Soient maintenant U et V deux autres (e.v.t.ℓ.c.s.) en dualité. On considère une fonctionnelle $\varphi \in \Gamma_o(E \times U)$ telle que

$$\varphi(x,0) = f(x) \quad , \quad \forall x \in E$$

et le problème suivant :

$$(P_u) \qquad h(u) = \operatorname{Inf}_{x \in E} \varphi(x,u)$$

Le problème (P_u) est nommé problème perturbé de (P). On remarque que $\alpha = h(0)$.
On peut montrer que la fonctionnelle

$$h : \quad U \to \mathbb{R}$$

définie par le problème (P_u) est convexe.

Au problème (P) on associe un problème (Q) qu'on appelle problème dual. On pose $g(v) = -h^*(v)$

$$(Q) \qquad \beta = \operatorname{Sup}_{v \in V} g(v)$$

$$\Omega_Q = \{v \in V : g(v) = \beta\}$$

On remarque que

$$\beta = h^{**}(0)$$

Par ailleurs la bipolaire $(f^*)^*$ d'une fonctionnelle $f \in Ap(E,\bar{\mathbb{R}})$ vérifie toujours

$$f^{**}(x) \leq f(x) \qquad \forall x \in E$$

L'égalité ayant lieu si f est une fonctionnelle convexe et s.c.i. au point $x \in E$ (voir [1]).
On en déduit que :

$$\beta \leq \alpha$$

L'égalité ayant lieu si h est s.c.i. au point $u = 0$.

3.1.1. DEFINITION :

Le problème (P) est dit inf-stable par rapport au perturbations $\varphi(x,u)$ si h est s.c.i. au point zéro. Autrement dit si $\beta = \alpha$.

Le problème (P) sera dit stable si la fonctionnelle h est continue en zéro.

Remarque :

La notion d'Inf-stabilité ne dépend pas de la topologie choisie sur U pourvu que cette topologie soit compatible avec la dualité (U,V). Autrement dit si le problème (P) est inf-stable pour une topologie compatible avec la dualité ; il l'est alors pour toute topologie compatible avec la dualité.

Il n'en est pas de même pour la stabilité.

3.1.2. DEFINITION :

Le problème (P) est dit inf-dif-stable s'il existe $v_o \in V$ tel que

$$h'(0;u) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{h(\lambda u)-h(0)}{\lambda} \geq < v_o, u > \quad , \quad \forall u \in U$$

- On montre que (P) est inf-dif-stable si et seulement si le sous différentiel de la fonctionnelle h est non vide au point u = 0, c'est-à-dire si :

$$\partial h(0) \neq \emptyset$$

L'inf-dif-stabilité a des conséquences très importantes quant **a** l'existence des solutions, comme l'affirme le théorème suivant :

3.1.3. THEOREME :

Les deux assertions suivantes sont équivalentes

i) Le problème (P) est inf-dif-stable

ii) Le problème (P) est inf-stable et le problème (Q) admet des solutions.

3.1.4. DEFINITION :

On appelle Lagrangien du problème (P) la fonctionnelle :

$$L : E \times V \to \bar{\mathbb{R}}$$

définie de la manière suivante :

$$L(x,v) = \inf_{u \in U} [< v,u > + \varphi(x,u)]$$

On peut démontrer que L est convexe par rapport à $x \in E$ et concave par rapport à $v \in V$. (L est aussi semi-continue supérieurement (s.c.s.) par rapport à $v \in V$).

On remarque qu'on a

$$f(x) = \sup_{v \in V} L(x,v)$$

et

$$-h^*(v) = \inf_{x \in E} L(x,v)$$

ce qui montre que les problèmes (P) et (Q) sont liés par le Lagrangien L et on a :

(1) $$\alpha = \inf_{x \in E} \sup_{v \in V} L(x,v)$$

(2) $$\beta = \sup_{v \in V} \inf_{x \in E} L(x,v)$$

3.1.5. THEOREME :

Si (P) est inf-dif-stable, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1) $\bar{x}$ est une solution de (P)

2) Il existe $\bar{v} \in V$ tel que

$$L(\bar{x},v) \leq L(\bar{x},\bar{v}) \leq L(x,\bar{v}) \quad , \quad \forall x \in E \quad , \quad \forall v \in V$$

un tel $\bar{v}$ est forcément solution de (Q).

3.1.6. THEOREME :

Si β est fini et s'il existe $x_o \in E$ tel que la fonctionnelle $L(x_o,.)$ soit sup-compacte pour la topologie faible de V, alors le problème (P) est inf-dif-stable.

3.1.7. EXEMPLE DE PERTURBATIONS :

Soit I un compact d'un espace topologique et S une application :

$$S : I \times E \to \mathbb{R}$$

telle que :

i) $S(t,.) \in \Gamma_o(E)$, $\forall t \in I$

ii) $S(.,x)$ est continue pour $\forall x \in E$

On considère l'ensemble :

$$A = \{x \in E : S(t,x) \leq 0 \quad \forall t \in I\}$$

que l'on suppose non vide.
Soit $f_o \in \Gamma_o(E)$

On considère le problème suivant :

$$(P) \qquad \alpha = \inf_{x \in A} f_o(x)$$

On pose

$$f(x) = f_o(x) + \chi_A(x)$$

où χ_A est la fonctionnelle indicatrice de A

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in A \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On a

$$(P) \qquad \alpha = \inf_{x \in E} f(x)$$

Soit maintenant $U = C(I)$ (espace des applications continues de $I \to \mathbb{R}$) muni de la norme du max. On prend comme $V = C(I)'$ (dual de U) avec la topologie faible.

On considère les perturbations vecticales (voir [1]).

$$\varphi(x,u) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad S(t,x) \leq u(t) \quad \forall t \in I \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est évident qu'on a :

$$\varphi(x,0) = f(x) \qquad \forall x \in E$$

Calculons le Lagrangien

$$L(x,v) = \inf_{u \in U} [< v,u > + \varphi(x,u)]$$

$$= \inf_{\substack{\theta \in U \\ \theta(t) \geq 0, \forall t \in I}} f(x) + < v,S(.,x) > + < v,\theta >$$

$$= \begin{cases} f(x) + < v,S(.,x) > & \text{si } x \in \text{dom } f \quad v \in K_+ \\ +\infty & \text{si } x \notin \text{dom } f \\ -\infty & \text{si } x \in \text{dom } f \quad v \notin K_+ \end{cases}$$

où $K_+ = \{v \in V : < v,u > \geq 0 \ \forall u \in U$ tel que $u(t) \geq 0, \forall t \in I\}$.

On suppose que α est fini et qu'il existe $x_o \in E$ tel que :

$$S(t,x_o) < 0 \quad \text{pour tout } t \in I .$$

Dans ces conditions le problème (P) est inf-dif-stable. (voir [1]). Alors un élément $\bar{x} \in E$ est solution de (P) si et seulement si :

$$\exists \bar{v} \in K_+ \quad \text{tel que}$$

$$f_o(\bar{x}) + < \bar{v},S(.,\bar{x}) > = \min_{x \in X} [f_o(x) + < \bar{v},S(.,x) >]$$

et $\quad < \bar{v},S(.,\bar{x}) > = 0.$

En effet, cela résulte du fait que dans ces conditions on a :

$$L(\bar{x},v) \leq L(\bar{x},\bar{v}) \leq L(x,\bar{v}) \qquad \forall x \in E \ , \ \forall v \in V .$$

3.2. NOTION DE POINT DE SELLE D'UN TRIPLET

3.2.1. Soient E et F deux (e.v.t.ℓ.c.s.) on considère une fonctionnelle

$$L : E \times F \to \bar{\mathbb{R}}$$

convexe-concave et semi continue c'est-à-dire :

$$-L(x,.) \in \Gamma(F) \qquad \forall x \in E$$

$$L(.,v) \in \Gamma(E) \qquad \forall v \in F$$

(On dira qu'une fonctionnelle convexe-concave est semi-continue si elle est s.c.i. pour la première variable et s.c.s. pour la seconde).

On considère en outre deux convexes fermés

$$A \subset E \quad \text{et} \quad B \subset F$$

DEFINITION

On dira que le triplet (L,A,B) admet une valeur si on a :

$$\alpha = \sup_{v \in B} \inf_{x \in A} L(x,v) = \inf_{x \in A} \sup_{v \in B} L(x,v)$$

On dira qu'un point $[\bar{x},\bar{v}] \in A \times B$ est un point de selle du triplet (L,A,B) si on a :

$$L(\bar{x},v) \leq L(\bar{x},\bar{v}) \leq L(x,\bar{v}) \quad , \quad \forall x \in A \ , \ \forall v \in B \ .$$

3.2.2. Problèmes d'optimisation associé a un triplet (L,A,B).

On a vu en 3.1.4. que la théorie de perturbations associe a deux problèmes duaux une fonctionnelle convexe concave nommée lagrangien qui lie les deux problèmes par les formules (1) et (2).

Inversement lorsqu'on a un triplet (L,A,B) défini comme précédemment on peut lui associer deux problèmes d'optimisation de la manière suivante :

On pose :

$$f(x) = \underset{v \in B}{\text{Sup}}\ L(x,v)$$

$$g(v) = \underset{x \in A}{\text{Inf}}\ L(x,v)$$

On appelle problème primal associé au triplet (L,A,B) le problème :

$$(P) \qquad \alpha = \underset{x \in A}{\text{Inf}}\ f(x)$$

$$\Omega_p = \{x \in A : f(x) = \alpha\}$$

On appelle problème dual associé au triplet (L,A,B) le problème :

$$(Q) \qquad \beta = \underset{v \in B}{\text{Sup}}\ g(v)$$

$$\Omega_Q = \{v \in B : g(v) = \beta\}$$

Alors on a :

$$\alpha = \underset{x \in A}{\text{Inf}}\ \underset{v \in B}{\text{Sup}}\ L(x,v)$$

$$\beta = \underset{v \in B}{\text{Sup}}\ \underset{x \in A}{\text{Inf}}\ L(x,v)$$

et on a toujours :

$$\beta \leq \alpha$$

L'égalité n'ayant lieu que si le triplet (L,A,B) admet une valeur.

On peut facilement montrer l'équivalence :

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha = \beta \text{ et} \\ \bar{x} \in \Omega_p, \bar{v} \in \Omega_Q \end{array} \right\} \quad <=> \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Le point } [\bar{x},\bar{v}] \in A \times B \\ \text{est un point de selle} \\ \text{du triplet L,A,B} \end{array} \right\}$$

Parmi les nombreux théorèmes d'existence des points de selle d'un triplet (L,A,B) nous citons un des plus simples que nous aurons a utiliser dans la suite.

3.2.3. THEOREME :

Soit L une fonctionnelle convexe-concave définie sur $E \times F$. On considère deux convexes $A \subset E$, $B \subset F$. Alors s'il existe a , $\bar{a} \in A$ $b, \bar{b} \in B$ tels que :

$$\sup_{v \in B} L(a,v) < +\infty$$

$$\inf_{x \in A} L(x,b) > -\infty$$

et

$L(.,\bar{b})$ inf compacte sur A

$L(\bar{a},.)$ sup compacte sur B

Alors le triplet (L,A,B) possède au moins un point de selle.

Voir [1] .

CHAPITRE 4

REGULARISATION DES PROBLEMES DE POINT DE SELLE

Lorsqu'un problème de recherche de points de selle d'une fonctionnelle convexe-concave est donné, il arrive souvent que l'un des deux problèmes (P) ou (Q) qu'on lui associe (voir garagraphe 3.2.2.) ne vérifie pas les hypothèses nécessaires d'une méthode d'optimisation que l'on pourrait appliquer. Nous allons donner, dans la Partie III du présent travail, un algorithme de résolution des problèmes de point de selle qui utilise l'uniforme concavité relative au problème (Q).

Or il s'avère que certains problèmes de point de selle, comme par exemple, le lagrangien du problème d'optimisation obtenu par les perturbations verticales (voir paragraphe 3.1.7.), la fonctionnelle convexe-concave dont on recherche les points de selle ne soit pas strictement concave par rapport à la deuxième variable.

Par ailleurs l'uniforme convexité (ou concavité) est une propriété qui dans l'application de certaines méthodes accélère où même rend possible la convergence ; et surtout assure l'unicité des solutions.

Pour ces raisons (essentiellement), nous étudierons des méthodes de régularisation relatives à des problèmes de point de selle.

Régularisations partielles

Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés et L une fonctionnelle

$$L : E \times F \to \mathbb{R}$$

convexe-concave. Soient aussi deux convexes $A \subset E$ et $B \subset F$ fermés. On considère le problème :

(S) Recherche des points de selle du triplet (L,A,B)
(i.e.) recherche des points $[\bar{x},\bar{v}] \in A \times B$ vérifiant

$$L(\bar{x},v) \leq L(\bar{x},\bar{v}) \leq L(x,\bar{v}) \ , \ \forall x \in A \ , \ \forall v \in B$$

Avec les notations du paragraphe (3.2.2.) nous posons :

$$f(x) = \sup_{v \in B} L(x,v)$$

$$g(v) = \inf_{x \in A} L(x,v)$$

(P)
$$\alpha = \inf_{x \in A} f(x)$$

$$\Omega_P = \{x \in A : f(x) = \alpha\}$$

(Q)
$$\beta = \sup_{v \in B} g(v)$$

$$\Omega_Q = \{v \in B : g(v) = \beta\}$$

Nous allons régulariser le problème (S) par rapport à l'une de ses deux variables.

Problème partiellement régularisé

On considère une fonctionnelle $H \in \Gamma_o(F)$ telle que

(3) $\quad \text{dom}\,(H) \supset B$

et le triplet (L_H, A, B) où

$$L_H(x,v) = L(x,v) - H(v)$$

Comme dans la Partie I nous aurons a distinguer deux types de régularisations partielles :

1) Régularisations ordinaires

2) Régularisations par translation

A cause de la symétrie qui existe entre les problèmes primaux et duaux associés a un problème de point de selle nous nous contenterons de régulariser le problème (S) par rapport à la deuxième variable.

4.1. REGULARISATIONS ORDINAIRES

On considère une suite de fonctionnelles $H_n \in \Gamma_o(F)$ vérifiant les hypothèses (I.1.H.) (voir Partie I, chapitre 1) telle que :

$$\text{dom}\,(H_n) \supset B \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Remarque :

Notre but essentiel étant d'établir l'uniforme, ou la stricte concavité du problème régularisé on pourrait supposer que les fonctionnelles H_n sont uniformément convexes. Or l'uniforme concavité est une hypothèse qui est utile pour résoudre le problème régularisé lui même, comme nous le verrons dans la Partie III du présent travail. Par conséquent, dans ce chapitre où nous nous bornons a étudier seulement la convergence du procédé de régularisation, cette hypothèse (l'uniforme concavité) n'est pas indispensable.

$$L_n(x,v) = L(x,v)-H_n(v)$$

$$f_n(x) = \operatorname{Sup}_{v\in B} L_n(x,v)$$

$$g_n(v) = \operatorname{Inf}_{x\in A} L_n(x,v)$$

et on considère les deux problèmes d'optimisation associés au triplet (L_n,A,B) :

(P_n)

$$\alpha_n = \operatorname{Inf}_{x\in A} f_n(x)$$

$$\Omega_{P_n} = \{x \in A : f_n(x) = \alpha_n\}$$

$$\beta_n = \operatorname{Sup}_{v\in B} g_n(v)$$

$$\Omega_{Q_n} = \{v \in B : g_n(v) = \beta_n\}$$

Remarque (importante) :

On a de manière évidente :

$$g_n(v) = \operatorname{Inf}_{x\in A} L(x,v)-H_n(v) = g(v)-H_n(v)$$

ce qui entraine que le problème (Q_n) est un problème d'optimisation obtenu par régularisation a partir du problème (Q). Par conséquent il entre complètement dans le cadre du chapitre 1. Alors la proposition du paragraphe (1.1. entraine que si β est fini alors on a :

i) $\Omega_{Q_n} \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$

ii) $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$

iii) Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que

$$v_n \in \Omega_{Q_n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Alors on a

. $\lim g(v_n) = \beta$

.. Tout point d'adhérence (s'il en existe) de la suite v_n est solution du problème (Q).

Par contre, il n'en est pas de même pour le problème (P_n). C'est-à-dire que le problème (P_n) n'est pas un problème obtenu par régularisation a partir du problème (P). Par conséquent les résultats du chapitre 1 ne peuvent pas s'appliquer à la suite des problèmes (P_n).

4.1.1. PROPOSITION :

Si le triplet (L,A,B) vérifie les hypothèses du thérorème (3.2.3.) et si la suite $H_n \in \Gamma_o(F)$ vérifie les hypothèses (I.1.H.),alors on a :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ le triplet (L_n,A,B) possède au moins un point de selle

2) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$

3) Toute suite $([x_n,v_n])_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $[x_n,v_n] \in \Omega_{P_n} \times \Omega_{Q_n}$, admet des points d'adhérence et tous ces points d'adhérence sont des points de selle de triplet (L,A,B).

Démonstration :

1) Sous les hypothèses faites, on montre facilement que le triplet (L_n,A,B) vérifie toutes les hypothèses du théorème (3.2.3.)

2) Le fait que le triplet (L_n,A,B) possède au moins un point de selle entraine qu'on a :

$$\alpha_n = \beta_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Par ailleurs on a :

$$\alpha = \beta$$

Alors la remarque précédente entraine :

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$$

3) Soit $([x_n,v_n])_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$[x_n,v_n] \in \Omega_{P_n} \times \Omega_{Q_n}$$

Montrons d'abord que cette suite admet obligatoirement des points d'adhérence

On va montrer que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se trouvent chaqu'une dans un compact.

Les hypothèses faites sur le triplet (L,A,B) entrainent que la fonctionnelle

$$g(v) = \inf_{x \in A} L(x,v)$$

est sup-compacte. Or la remarque précédente montre que :

$$\lim_{n \to \infty} g(v_n) = \beta = \sup_{v \in B} g(v)$$

Ce qui entraine que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se trouve dans un compact tout au moins a partir d'un certain indice $n_o \in \mathbb{N}$.

Par ailleurs d'après les hypothèses faites sur le triplet (L,A,B) il existe $\bar{b} \in B$ (voir paragraphe (3.2.3.)) tel que la fonctionnelle

$$L(.,\bar{b}) \in \Gamma(E)$$

soit inf-compacte sur A

Par définition de la fonctionnelle L_n on a :

$$(4) \qquad L(x_n,\bar{b}) = L_n(x_n,\bar{b}) + H_n(\bar{b})$$

D'autre part le point $[x_n,v_n] \in A \times B$ étant un point de selle du triplet (L_n,A,B) on a :

$$L_n(x_n,\bar{b}) \leq L_n(x_n,v_n) = \alpha_n$$

D'où on déduit avec (4) que :

$$(5) \qquad L(x_n,\bar{b}) \leq \alpha_n + H_n(\bar{b}) \ .$$

Or les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(H_n(\bar{b})_{n \in \mathbb{N}}$ étant convergentes il existe un réel M et un indice n_1 tel que

$$\alpha_n + H_n(\bar{b}) \leq M \qquad \forall n > n_1$$

D'où on déduit avec (5) que :

$$L(x_n,\bar{b}) \leq M \qquad \forall n > n_1$$

Alors l'inf-compacité de la fonctionnelle $L(.,\bar{b})$ entraine que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se trouve dans un compact a partir d'un indice n_1 .

Nous en déduisons que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admettent des points d'adhérence pour les topologies respectives de E et de F. Par conséquent la suite $([x_n,v_n])_{n \in \mathbb{N}}$ admet des points d'adhérence pour la topologie produite de E × F.

Soit $[\tilde{x},\tilde{v}] \in A \times B$ un point d'adhérence de la suite $([x_n,v_n])_{n \in \mathbb{N}}$. Le point $[x_n,v_n] \in A \times B$ étant un point de selle du triplet (L_n,A,B) on a :

$$L_n(x_n,v) \leq L_n(x_n,v_n) \leq L_n(x,v_n) \qquad \forall x \in A, \forall v \in B, \forall n \in \mathbb{N}$$

donc :

$$(6) \qquad L(x_n,v) = L_n(x_n,v) + H_n(v) \leq \alpha_n + H_n(v) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall v \in B$$

Par ailleurs on a par hypothèse :

$$\lim_{n \to +\infty} H_n(v) = 0 \qquad \forall v \in B$$

ce qui entraine que pour un v fixe et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\alpha_n + H_n(v) \leq \alpha + \varepsilon \quad , \quad \forall n > n_o$$

d'où on déduit avec (6) que pour v fixé :

$$x_n \in \{x \in A : L(x,v) < \alpha+\varepsilon\} \quad \forall n > n_o .$$

Or la fonctionnelle L(.,v) étant s.c.i. se dernier ensemble est fermé. Ce qui entraine que :

$$L(\tilde{x},v) \leq \alpha + \varepsilon \quad \text{pour } v \text{ fixé et pour tout } \varepsilon > 0$$

D'où :

$$L(\tilde{x},v) \leq \alpha$$

En faisant le même raisonnement pour tout $v \in B$ on trouve

$$(7) \qquad L(\tilde{x},v) \leq \alpha \qquad \forall v \in B$$

ce qui entraine que $\tilde{x} \in \Omega_p$

Par ailleurs d'après la remarque précédente on sait que le point $\tilde{v} \in B$ (point d'adhérence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$) est solution du problème (Autrement dit :

$$(8) \qquad L(x,\tilde{v}) \geq \alpha \qquad \forall x \in A$$

ce qui, avec (7) entraine le résultat.

———————X———————

Corollaire :

Si au lieu de vérifier les hypothèses (I.1.H.) la suite $H_n \in \Gamma_o($I vérifie les hypothèses de la proposition (1.3.1), alors en plus des résult de la proposition (4.1.1.) on a :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le problème (Q_n) admet une solution unique. C'est-à-dire

$$\Omega_{Q_n} = \{v_n\}$$

2) La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point $\bar{v} \in \Omega$ qui vérifie en même temps

$$h(\bar{v}) \leq h(v) \qquad \forall v \in \Omega_Q \quad \text{(voir hypothèses (I.1.H').}$$

Démonstration :

1) Résulte de la stricte convexité de H_n

2) Résulte de la proposition (1.2.1.).

Remarque :

Dans la section (4.3.) en régularisant le problème (S) sur l'ensemble des variables nous obtiendrons un résultat analogue pour les solutions du problème (P_n).

4.1.2. COMPORTEMENT DU PROBLEME (P_n)

PROPOSITION :

Sous les mêmes hypothèses que la proposition précédente on a :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in A$$

Démonstration :

D'après les hypothèses faites sur la suite H_n il existe une suite $M_n \in \mathbb{R}$ telle que :

$$H_n(v) \geq M_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0 \quad \text{(voir chapitre 1)}$$

A lors on a :

$$L_n(x,v) = L(x,v)-H_n(v) \leq L(x,v)-M_n \quad , \quad \forall x \in A, \forall v \in B$$

d'où :

$$f_n(x) \leq f(x)-M_n \qquad \forall x \in A \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

Par conséquent :

$$(9) \qquad \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \leq f(x) \quad , \quad \forall x \in A$$

par ailleurs on a :

$$(10) \qquad L(x,v)-H_n(v) \leq f_n(x) \quad \forall x \in A, \forall v \in B, \forall n \in \mathbb{N}$$

d'où :

$$L(x,v) \leq \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in A, \forall v \in B$$

Par conséquent :

$$(11) \qquad f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

ce qui, avec (9) entraine le résultat.

X

Remarque :

Nous avons déjà fait remarquer que le problème (P_n) n'est pas un problème obtenu par régularisation à partir du problème (P). Les deux propositions précédentes montrent que le fait de régulariser le problème dual associé à un triplet (L,A,B) engendre une méthode de type différent pour la résolution du problème primal. On obtient donc des méthodes qu'on peut appeler "Méthodes duales des méthodes de régularisation". Il serait donc intéressant d'étudier les propriétés, de ce genre des méthodes d'optimisation.

Nous allons donner un exemple qui permet de voir que les méthodes de pénalités extérieures entrent dans cette catégorie.

4.1.3. La méthode de pénalités extérieures en tant que dual d'une méthode de régularisation :

Soient $f_o, g_i \in \Gamma_o(E)$ $i=1,\ldots,m$ $m+1$ fonctionnelles et K un convexe compact de E. On considère le problème suivant :

$$(P) \qquad \alpha = \inf_{\substack{x \in \\ g_i(x) \leq 0 \; i=1,\ldots,m}} \inf_{x \in K} f_o(x)$$

A ce problème on associe par les perturbations verticales (voir paragraphe 3.1.7) le lagrangien suivant :

$$L(x,v) = \begin{cases} f_o(x) + \sum_{i=1}^{m} v_i g_i(x) & \text{si } x \in \text{dom}(f_o) \quad v \in (\mathbb{R}_+)^m \\ +\infty & \text{si } x \notin \text{dom}(f_o) \\ -\infty & \text{si } x \in \text{dom}(f_o) \quad v \notin (\mathbb{R}_+)^m \end{cases}$$

Si on suppose qu'il existe $x_o \in K$ tel que :

$$f_i(x_o) < 0 \qquad i=1,\ldots,m$$

Alors le triplet $(L,K,(\mathbb{R}_+)^m)$ vérifie toutes les hypothèses du théorème du paragraphe (3.2.3). Par conséquent le triplet $(L,K,(\mathbb{R}_+)^m)$ admet au moins un point de selle.

Nous allons régulariser le problème de recherche des points de selle du triplet $(L,K,(\mathbb{R}_+)^m)$ avec une suite régularisante $H_n \in \Gamma_o(\mathbb{R}^m)$ de la forme :

$$H_n(v) = \Sigma h_{n,i}(v_i) \qquad h_{n,i} \in \Gamma_o(\mathbb{R})$$

avec :

1) $h_{n,i}(0) = 0$, $h_{n,i}(v_i) \geq 0 \qquad \forall v_i \in \mathbb{R}_+$

2) $\lim_{n \to \infty} h_{n,i}(v_i) = 0 \qquad \forall v_i \in \mathbb{R}_+ \quad i=1,\ldots,m$

Sous ces conditions, toutes les hypothèses de la proposition (4.1.1.) sont réalisées.

On pose :

$$L_n(x,v) = L(x,v) - \sum_{i=1}^{m} h_{n,i}(v_i)$$

Le problème primal (P_n) associe au triplet $(L_n, K, (\mathbb{R}_+)^m)$ est

$$(P_n) \qquad \alpha_n = \inf_{x \in K} f_n(x)$$

où

$$(13) \qquad f_n(x) = \sup_{v \in \mathbb{R}_+^m} L_n(n,v) = f_o(x) + \sum_{i=1}^{m} \sup_{v_i \geq 0} [g_i(x)v_i - h_{n,i}(v_i)]$$

On pose :

$$(14) \qquad \ell_{n,i}(x) = \sup_{v_i \geq 0} [g_i(x)v_i - h_{n,i}(v_i)]$$

Nous allons montrer que la fonctionnelle $\ell_{n,i} \in (E)$ vérifie

1) $\ell_{n,i}(x) = 0$ si $g_i(x) \leq 0$

2) $\lim_{n \to \infty} \ell_{n,i}(x) = +\infty$ si $g_i(x) > 0$

1) si $g_i(x) \leq 0$ alors on a :

$$g_i(x)v_i - h_{n,i}(v_i) \leq 0 \qquad \forall v_i \geq 0$$

d'où $\ell_{n,i}(x) = 0$.

2) L'hypothèse $\lim_{n \to \infty} h_{n,i}(v_i) = 0 \quad \forall v_i \in \mathbb{R}_+$ entraine que pour tout $K_i \in \mathbb{R}$ il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que

$$0 \leq h_{n,i}(v_i) \leq \varepsilon \qquad \forall v_i \in [0, K_i] \text{ et } \forall n > n_o$$

On a :

$$(15) \qquad \ell_{n,i}(x) = \mathrm{Max}\left(\sup_{v_i \leq K_i} [g_i(x)v - h_{n,i}(v)],\ \sup_{v > K_i} [g_i(x)v - h_{n,i}(v)]\right)$$

si on a $g_i(x) > 0$ alors (15) entraine

$$\ell_{n,i}(x) \geq g_i(x)K_i - \varepsilon \qquad \forall n > n_o$$

ce qui montre que $\ell_{n,i}(x)$ n'est pas borné.

Dans ces conditions le problème (P_n) est un problème obtenu par pénalisations extérieures a partir du problème (P).

Exemple :

$$H_n(v) = \frac{1}{rn} \sum v_i^r \qquad r > 1$$

On a dans ce cas :

$$f_n(x) = f_o + \frac{r-1}{r} n^{\frac{1}{r-1}} \sum_{i=1}^{m} [g_i(x)_+]^{\frac{r}{r-1}}$$

4.2. REGULARISATIONS PAR TRANSLATION

On suppose que F est un espace de Banach réflexif. On prendra sur $E \times F$ la topologie produite par la topologie de E et la topologie faible de F.

Considérons le problème (S) posé au début du chapitre en supposant que le triplet (L,A,B) vérifie les hypothèses du théorème énoncé au paragraphe 3.2.3.

Soit $H \in \Gamma_o(F)$ une fonctionnelle vérifiant les hypothèses $(I.2.H_2)$ (voir section 2.3.)

Sous ces conditions pour tout $w \in B$ le triplet (L_w,A,B) où

$$L_w(x,v) = L(x,v) - H(v-w)$$

vérifie lui aussi les hypothèses du théorème du (3.2.3) par conséquent lui aussi admet au moins un point de selle.

Remarquons que pour tout $w \in B$ l'hypothèse de stricte convexité de la fonctionnelle H entraine l'unicité de la solution du problème dual associé au triplet (L_w, A, B).

Soit $v_o \in B$ un élément initial quelconque. On définit la suite des problèmes :

(S_n) Recherche des points de selle du triplet (L_n, A, B)

Où

$$L_n(x,v) = L(n,v) - H(v-v_{n-1})$$

$v_{n-1} \in B$ étant la solution du problème dual associé au triplet (L_{n-1}, A, B)

On pose comme dans (4.1.)

$$f_n(x) = \operatorname{Sup}_{v \in B} L_n(x,v)$$

$$g_n(x) = \operatorname{Inf}_{x \in A} L_n(x,v)$$

(P_n)

$$\alpha_n = \operatorname{Inf}_{x \in A} f_n(x)$$

$$\Omega_{P_n} = \{x \in A : f_n(x) = \alpha_n\}$$

(Q_n)

$$\beta_n = \operatorname{Sup}_{v \in B} g_n(v)$$

$$\Omega_{Q_n} = \{v \in B : g_n(v) = \beta_n\}$$

4.2.1. Remarque :

On a d'une manière évidente :

$$g_n(v) = g(v) + H(v-v_{n-1})$$

ce qui entraine que le problème (Q_n) est un problème d'optimisation obtenu par "régularisation par translation" a partir du problème (Q).

Par ailleurs les hypothèses faites sur le triplet (L,A,B) entrainent que la fonctionnelle

$$g(v) = \inf_{x \in A} L(x,v)$$

est sup-compacte. Alors la proposition du paragraphe (2.3.1.) entraine que l'une des deux assertions suivantes est vérifiée

Soit 1) Il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n_o+1} = v_{n_o}$

et alors $v_{n_o} \in \Omega_Q$

Soit 2) La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et on a

i) $\lim_{n \to \infty} \|v_{n+1} - v_n\| = 0$

ii) $\lim_{n \to \infty} \quad _n = \beta = \sup_{v \in B} g(v)$

$\lim_{n \to \infty} g(v_n) = \beta$

iii) Tout point d'adhérence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est solution du problème Q .

Par contre (P_n) n'est pas un problème obtenu par régularisation à partir du problème (P).

4.2.2. **PROPOSITION** :

Si le triplet (L,A,B) vérifie les hypothèses du théorème du paragraphe (3.2.3) et si H vérifie les hypothèses $(I.2.H_2)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ le triplet (L_n,A,B) admet des points de selle ; pour toute suite $([x_n,v_n])_{n \in \mathbb{N}}$ telle $[x_n,v_n] \in \Omega_{p_n} \times \Omega_{Q_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ l'une des assertions suivantes et obligatoirement vérifiée

Soit 1) Il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n_o} = v_{n_o+1}$ et alors on a :

$[x_{n_o+1}, v_{n_o+1}] \in \Omega_p \times \Omega_Q$

Soit 2) La suite $([x_n,v_n])_{n \in \mathbb{N}}$ admet obligatoirement des points d'adhérence et tous ces points d'adhérence sont des points de selle du triplet (L,A,B) .

Démonstration :

L'existence des points de selle du triplet (L_n,A,B) découle du fait que les hypothèses faites sur la fonctionnelle H et sur le triplet (L,A,B) entrainent la réalisation des hypothèses du théorème(3.2.3) pour le triplet (L_n,A,B)

1) S'il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n_o+1} = v_{n_o}$ on a

(16) $$L(x_{n_o+1},v)-H(v-v_{n_o}) \leq L(x_{n_o+1},v_{n_o}) \leq L(x,v_{n_o}) \quad \forall x \in A, \forall v \in B$$

La première partie de l'inégalité montre que le point $v_{n_o} \in B$ est un point fixe de l'application

$$U_{n_o+1} : B \to B$$

qui a un point $w \in B$ fait correspondre l'unique solution du problème

$$\sup_{v \in B} L(x_{n_o+1},v)-H(v-w)$$

Alors la proposition (2.1.1.) entraine :

(17) $$L(x_{n_o+1},v) \leq L(x_{n_o+1},v_{n_o}) \quad \forall v \in B$$

ce qui entraine avec (16) que le point $[x_{n_o+1},v_{n_o}]$ est un point de selle du triplet (L,A,B).

2) La remarque précédente entraine que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, elle admet donc des points d'adhérence pour la topologie faible de F.

Montrons maintenant que toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $x_n \in \Omega_{p_n}$ admet des points d'adhérence.

Le point $[x_n,v_n] \in A \times B$ étant un point de selle du triplet (L_n,A,B) on a :

(18) $$L(x_n,v)-H(v-v_{n-1}) \leq L(x_n,v_n)-H(v_n-v_{n-1}) \leq L(x,v_n)-H(v_n-v_{n-1}),$$

$$\forall x \in A, \forall v \in B$$

On pose :

$$(19)\qquad \tilde{L}(x_n,v) = \begin{cases} -L(x_n,v) & \text{si} \quad v \in B \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors on a :

$$(18')\qquad \tilde{L}(x_n,v)+H(v-v_{n-1}) \geq \tilde{L}(x_n,v_n)+H(v_n-v_{n-1}) \qquad \forall v \in F$$

ce qui entraine que :

$$(20)\qquad 0 \in \partial(H_{-v_{n-1}}+\tilde{L}(x_n,.))(v_n)$$

La fonctionnelle H est par hypothèse, continue pour la topologie forte. Alors comme on a :

$$H_{-v_{n-1}} \in \Gamma_o(F),\ \tilde{L}(x_n,.) \in \Gamma_o(F)$$

On peut appliquer à (20) la loi d'addition des sous-différentiels (voir paragraphe (2.1.1.)). On obtient :

$$(20')\qquad 0 \in H'(v_n-v_{n-1}) + \partial_2\tilde{L}(x_n,v_n)$$

(où ∂_2 désigne l'opérateur sous différentiel par rapport à la deuxième variable).

Ce qui entraine qu'il existe $u_n \in F^*$ (dual de F) tel que

$$(21)\qquad u_n \in \partial_2\tilde{L}(x_n,v_n)$$

$$(22)\qquad u_n = -H'(v_n-v_{n-1})$$

(21) entraine :

$$\tilde{L}(x_n,v) \geq \tilde{L}(x_n,v_n)+ < u_n,v-v_n > \quad , \quad \forall v \in F$$

ce qui entraine avec (19) que :

$$(23)\qquad L(x_n,v) \leq L(x_n,v_n) - < u_n,v-v_n > \quad , \quad \forall v \in B$$

D'après la remarque du rparagraphe (4.2.1.) on a :

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v_{n-1}\| = 0$$

Or d'après les hypothèses (I.2.H_2) . H' est continue en zéro pour les topologies fortes de F et de F^* ce qui entraine avec (22) que :

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{F^*} = 0 \qquad (24)$$

(où $\|.\|_{F^*}$ désigne la norme dans l'espace F^*).

La deuxième inégalité de (18) entraine que

$$L(x_n,v_n) = \inf_{x\in A} L(x,v_n) = g(v_n) \qquad (25)$$

Or d'après la remarque précédente on a :

.) la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

..) $\lim_{n\to\infty} L(x_n,v_n) = \lim_{n\to\infty} g(v_n) = \alpha$

Ce qui entraine que le deuxième membre de l'inégalité de (23), tend vers α pour tout $v \in B$.

Par conséquent pour tout $v \in B$ fixé et pour tout nombre réel λ tel que $\alpha \leq \lambda$ il existe un entier $N(v) \in \mathbb{N}$

$$L(x_n,v_n) - \langle u_n, v-v_n \rangle \leq \lambda \ , \ \forall n > N(v)$$

Alors (23) entraine :

$$x_n \in \{x \in A : L(x,v) \leq \lambda\} \ , \ \forall n \geq N(v) \qquad (26)$$

Par ailleurs les hypothèses faites sur le triplet (L,A,B) entrainent (voir paragraphe (3.2.3)) qu'il existe $\bar{b} \in B$ tel que la fonctionnelle $L(.,\bar{b})$ soit inf-compact.

Alors (26) entraine pour $v = \bar{b}$ que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se trouve dans un compact par conséquent elle admet des points d'adhérence.

Soit $\tilde{x}$ un point d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors la semi continuité inférieure de la fonctionnelle L(.,v) pourtout $v \in B$ entraine avec (26) que :

$$L(\tilde{x},v) \leq \lambda \qquad \forall \lambda \geq \alpha \qquad \forall v \in B$$

D'où :

$$(27) \qquad L(\tilde{x},v) \leq \alpha \qquad \forall v \in B$$

ce qui entraine que $\tilde{x} \in \Omega_p$.

Par ailleurs on sait d'après la remarque du paragraphe (4.2.1) que tout point d'adhérence $\tilde{v}$ de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est solution du problème (Q). Autrement dit

$$(28) \qquad \alpha = g(\tilde{v}) = \inf_{x \in A} L(x,\tilde{v})$$

ce qui entraine avec (27) que :

$$L(\tilde{x},v) \leq L(\tilde{x},\tilde{v}) \leq L(x,\tilde{v}) \quad , \quad \forall x \in A \ , \ \forall v \in B$$

D'où le résultat.

Remarque :

Comme on l'a fait à la fin du paragraphe (4.1.2), on remarque que le problème (P_n) associé au triplet (L_n,A,B) n'est pas un problème régularisé par translation a partir du problème (P). La proposition précédente montre que tout point d'adhérence des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $x_n \in \Omega_{p_n}$ est solution du problème (P). Par conséquent dans ce cas (de régularisation par translation) aussi le fait de régulariser le rpoblème dual associé à un triplet (L,A,B) engendre une méthode pour la résolution du problème (P) associé au triplet (L,A,B).

Exemple :

On considère l'exemple donné en (4.1.3) que l'on régularise par translation avec la fonctionnelle

$$H(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} v_i^2$$

A la $n^{ième}$ itération on a $v_{n-1} \in (\mathbb{R}_+)^m$. On pose

$$L_n(x,v) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} v_i g_i(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} (v_i - v_{i,n-1})^2$$

(où $v_{i,n-1}$ est la $i^{ième}$ composante du vecteur v_{n-1})

Alors en posant :

$$G(x) = \begin{vmatrix} g_1(x) \\ \\ \\ g_m(x) \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

et en notant par π l'opérateur de projection sur $(\mathbb{R}_+)^m$, on trouve

$$f_n(x) = \sup_{v \in (\mathbb{R}_+)^m} L_n(x,v)$$

$$= f(x) + \langle G(x), (G(x)+v_{n-1}) \rangle - \frac{1}{2} \left\| \pi(G(x)+v_{n-1}) - v_{n-1} \right\|^2$$

4.3. REGULARISATION DES PROBLEMES DE POINTS DE SELLE, SUR L'ENSEMBLE DES VARIABLES

Le corollaire de la proposition (4.1.1.) nous avait permis d'affirmer d'une part l'unicité des solutions des problèmes (Q_n) et d'autre part l'unicité des points d'adhérence de la suite de ses solutions. Nous allons maintenant démontrer un résultat plus général.

On considère deux espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés E, F et une fonctionnelle :

$$h : E \times F \to \bar{\mathbb{R}}$$

telle que :

(II.4.H)

1) dom $h(x,.) = F$ pour tout $x \in E$

dom $h(.,v) = E$ pour tout $v \in F$

2) Pour tout $x \in A$ et pour tout $v \in B$

- $h(x,.)$ soit concave et semi continue supérieurement
- $h(.,v) \in \Gamma_o(E)$

3) Pour tout $x \in A$ et pour tout $v \in B$ on ait

$h(x,.)$ sup compacte et bornée supérieurement sur B

$h(.,v)$ inf compacte et bornée inférieurement sur A

On régularise le problème (S) par la fonctionnelle

$$H_n(x,v) = \frac{1}{r_n} h(x,v)$$

où r_n est une suite positive tendant vers $(+\infty)$.

On pose

$$L_n(x,v) = L(x,v) + \frac{1}{r_n} h(x,v)$$

$$\underline{h}(x) = \operatorname{Sup}_{v \in B} h(x,v)$$

$$\bar{h}(v) = \operatorname{Inf}_{x \in A} h(x,v)$$

Les hypothèses (II.4.H) entrainent que :

$$\operatorname{dom}(\underline{h}) \supset A$$

$$\operatorname{dom}(-\bar{h}) \supset B$$

4.3.1. PROPOSITION

Si en plus des hypothèses (II.4.H) on suppose que la fonctionnelle h est strictement convexe, strictement concave et si on suppose que le triplet (L,A,B) vérifie les hypothèses du théorème (3.2.3.).
Alors on a :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ le triplet (L_n,A,B) admet un point de selle unique $[x_n,v_n] \in A \times B$.

2) La valeur du triplet (L_n,A,B) converge vers la valeur du triplet (L,A,B).

3) La suite $([x_n,v_n])_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point de selle du triplet (L,A,B), qui est en même temps, le point de selle unique du triplet (h,Ω_p,Ω_Q).

Démonstration :

1) Résulte du fait que sous les conditions de la proposition Le triplet (L_n,A,B) vérifie toutes les hypothèses du théorème (3.2.3.), et de la stricte convexité et concavité de la fonctionnelle h.

2) Le point $[x_n,v_n] \in A \times B$ étant le point de selle du triplet (L_n,A,B) on a :

$$(29)\quad L(x_n,v) + \frac{1}{r_n} h(x_n,v) \leq L(x_n,v_n) + \frac{1}{r_n} h(x_n,v_n) \leq L(x,v_n) + \frac{1}{r_n} h(x,v_n) \ ,$$

$$\forall x \in A \ , \ \forall v \in B$$

On pose :

$$\alpha_n = L(x_n,v_n) + \frac{1}{r_n} h(x_n,v_n) = \text{valeur du triplet } (L_n,A,B).$$

D'après les hypothèses, le triplet (L,A,B) possède des points de selle. Soit $[\tilde{x},\tilde{v}] \in A \times B$ un de ces points. On a :

$$(30)\qquad L(\tilde{x},v) \leq L(\tilde{x},\tilde{v}) \leq L(x,\tilde{v}) \quad , \quad \forall x \in A \ , \ \forall v \in B \ .$$

En écrivant la relation (29) pour $x = \tilde{x}$, $v = \tilde{v}$ et la relation (30) pour $x = x_n$, $v = v_n$ il vient :

$$(31) \qquad L(x_n,\tilde{v}) + \frac{1}{r_n} h(x_n,\tilde{v}) \leq \alpha_n \leq L(\tilde{x},v_n) + \frac{1}{r_n} h(\tilde{x},v_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(32) \qquad L(\tilde{x},v_n) \leq \alpha \leq L(\tilde{x},v_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(où $\alpha = L(\tilde{x},\tilde{v})$ = valeur de triplet (L,A,B))

De (31) et (32) on déduit :

$$(33) \qquad \alpha + \frac{1}{r_n} h(x_n,\tilde{v}) \leq \alpha_n \leq \frac{1}{r_n} h(\tilde{x},v_n) + \alpha$$

Par ailleurs on a d'après les hypothèses faites sur h

$$h(x_n,\tilde{v}) \geq \bar{h}(\tilde{v}) > -\infty$$
$$h(\tilde{x},v_n) \leq \underline{h}(\tilde{x}) < +\infty$$

D'où avec (33) il vient :

$$\alpha + \frac{1}{r_n} \bar{h}(\tilde{v}) \leq \alpha_n \leq \alpha + \frac{1}{r_n} \underline{h}(\tilde{x})$$

Ce qui entraine :

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \quad .$$

3) La relation (33) entraine :

$$h(x_n,\tilde{v}) \leq h(\tilde{x},v_n) \leq \underline{h}(\tilde{x}) < +\infty$$
$$h(\tilde{x},v_n) \geq h(x_n,\tilde{v}) \geq \bar{h}(\tilde{v}) > -\infty$$

Alors l'inf-compacité de la fonctionnelle $h(.,\tilde{v})$ et la sup compacité de la fonctionnelle $h(\tilde{x},.)$ entrainent que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se trouvent chaqu'une dans un compact .
D'où on déduit qu'elles admettent des points d'adhérence.

Par ailleurs la relation (29), compte tenu de la définition des fonctionnelle $\underline{h}$ et $\bar{h}$, entraine :

$$(34) \qquad L(x_n,v) + \frac{1}{r_n} \bar{h}(v) \leq \alpha_n \leq L(x,v_n) + \frac{1}{r_n} \underline{h}(x) \quad , \forall x \in A \quad , \forall v \in B \quad .$$

Montrons dans un premier temps que tout point d'adhérence $\bar{x} \in A$ de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie

(35) $\quad L(\bar{x},v) \leq \alpha \qquad \forall v \in B$

La relation (34) entraine :

(34') $\quad L(x_n,v) \leq \alpha_n - \frac{1}{r_n} \bar{h}(v) \ , \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall v \in B$

Le deuxième membre de l'inégalité tend vers α. Par conséquent pour tout v fixé et pour tout $\lambda \geq \alpha$ il existe un entier N(v) (dépendant de v) tel que :

$$x_n \in \{x \in A : L(x,v) \leq \lambda\} \qquad \forall n > N(v)$$

Le point $\bar{x}$ étant un point d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et du fait que ce dernier ensemble soit fermé grâce à la semi continuité inférieur de la fonctionnelle L(.,v), on a :

$$\bar{x} \in \{x \in A : L(x,v) \leq \lambda\} \qquad \forall v \in B \qquad \forall \lambda > \alpha$$

d'où

$$L(\bar{x},v) \leq \alpha \qquad \forall v \in B$$

On démontre d'une manière analogue que tout point d'adhérence $\bar{v} \in B$ de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :

(36) $\quad L(x,\bar{v}) \geq \alpha \qquad \forall x \in A$

ce qui, avec (35) entraine que le point $[\bar{x},\bar{v}] \in A \times B$ est un point de selle du triplet (L,A,B).

Montrons maintenant que le point $[\bar{x},\bar{v}] \in A \times B$ est un point de selle du triplet (h,Ω_p,Ω_Q).
On a vu que la relation (33) entraine :

$$h(x_n,\tilde{v}) \leq h(\tilde{x},v_n) \qquad \forall \tilde{x} \in \Omega_p \ , \ \forall \tilde{v} \in \Omega_Q$$

La semi continuité inférieure de la fonctionnelle $h(.,\tilde{v})$ et la semi continuité supérieure de la fonctionnelle $h(\tilde{x},.)$ entrainent alors, que pout tout point d'adhérence $[\bar{x},\bar{v}]$ de la suite $([x_n,v_n])_{n \in \mathbb{N}}$ on a :

$$h(\bar{x},\tilde{v}) \leq h(\tilde{x},\bar{v}) \qquad \forall \tilde{x} \in \Omega_p \ , \ \forall \tilde{v} \in \Omega_Q$$

ce qui entraine que le point $[\bar{x},\bar{v}] \in A \times B$ est un point de selle de triplet (h,Ω_p,Ω_Q). Or la fonctionnelle h étant strictement convexe-strictement concave le triplet (h,Ω_p,Ω_Q) admet un point de selle unique, par conséquent la suite $([x_n,v_n])_{n \in \mathbb{N}}$ admet un point d'adhérence unique. Alors le fait que la suite $([x_n,v_n])_{n \in \mathbb{N}}$ se trouve dans un compact, entraine qu'elle converge.

TROISIEME PARTIE

METHODES NUMERIQUES POUR LA RECHERCHE DES POINTS DE SELLE DES FONCTIONNELLES CONVEXE - CONCAVE

INTRODUCTION

Dans cette partie nous étudions des méthodes pour rechercher les points de selle des fonctionnelles convexes-concaves. L'uniforme convexité ou concavité par rapport à l'une ou à l'autre variable, des fonctionnelles dont on recherchera les points de selle, jouera un rôle essentiel dans les méthodes numériques qu'on va employer. C'est ce qui justifie dans une large mesure les méthodes de régularisation étudiées dans les parties précédentes. Nous verrons des exemples de problèmes de recherche des points de selle ne vérifiant pas l'hypothèse d'uniforme convexité ou concavité que l'on régularisera dans ce sens pour leur appliquer des méthodes utilisant l'uniforme concavité.

Au chapitre 5 nous donnons un algorithme pour rechercher les points de selle des fonctionnelles convexes et uniformément concaves.

Ensuite, nous appliquons ces méthodes pour résoudre des problèmes de recherche des points de selle, régularisés.

CHAPITRE 5

ALGORITHMES POUR LA RECHERCHE DES POINTS DE SELLE DES FONCTIONNELLES CONVEXES ET UNIFORMEMENT CONCAVES

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et F un espace de Banach reflexif.

On considère une fonctionnelle :

$$L : E \times F \to \bar{\mathbb{R}}$$

convexe-concave telle que la fonctionnelle L(x,.) soit uniformément concave, uniformément en x. Autrement dit il existe une fonctionnelle $\delta: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ non décroissante, s'annulant seulement en zéro telle que pour tout $x \in E$ et pour tout $\nu_1, \nu_2 \in F$ on ait :

$$L(x, \frac{\nu_1 \epsilon \nu_2}{2}) \geq \frac{L(x,\nu_1)+L(x,\nu_2)}{2} + \delta(\|\nu_1-\nu_2\|) \qquad (*)$$

Remarque - D'après les résultats de la première partie (voir 2.2.2.) on sait qu'un tel δ peut être pris strictement croissante et même, telle que :

$$\delta(2\tau) \geq 4\delta(\tau) \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}_+$$

(*) Pour l'étude des fonctionnelles concaves on prend sur $\bar{\mathbb{R}}$ la loi d'addition donnant la prépondérance a $(-\infty)$ (i.e. $+\infty+(-\infty) = -\infty$).

5.1 - POSITION DU PROBLEME ET DESCRIPTION DE L'ALGORITHME

On considère deux convexes fermés $A \subset E$, $B \subset F$ et le triplet (L,A,B). On pose avec les notations de la deuxième partie

$$f(x) = \sup_{\nu \in B} L(x,\nu)$$

$$g(\nu) = \inf_{x \in A} L(x,\nu)$$

et les deux problèmes (P) et (Q) associés :

$$(P) \qquad \alpha = \inf_{\in A} f(x)$$

$$\Omega_P = \{x \in A : f(x) = \alpha\}$$

$$(Q) \qquad \beta = \sup_{\nu \in B} g(\nu)$$

$$\Omega_Q = \{\nu \in B : g(\nu) = \beta\}$$

Remarquons que les hypothèses faites sur L entraînent que g est uniformément concave.

Avant de donner la description de l'algorithme nous allons démontrer quelques résultats élémentaires.

5.1.1. - Lemme

Soit k une fonctionnelle uniformément concave et semi continue supérieurement sur un espace de Banach reflexif. Si k est bornée supérieurement sur F, alors k est sup-compacte pour la topologie faible de F (par conséquent sa borne supérieure est atteinte).

Démonstration

On pose

$$S = \operatorname{Sup}_{\nu \in F} k(\nu) < +\infty$$

Alors pour tout $\lambda < S$ l'ensemble

$$K_\lambda = \{\nu \in F : k(\nu) \geq \lambda\}$$

est convexe fermé et non vide.

Montrons que K_λ est faiblement compact.
Soient ν_o, ν deux éléments de K_λ on a :

$$(1) \quad S \geq k\left(\frac{\nu_o+\nu}{2}\right) \geq \frac{k(\nu_o)+k(\nu)}{2} + \gamma(\|\nu-\nu_o\|)$$

(où γ est une fonctionnelle (U.C.) de k).
(1) entraîne

$$S \geq \lambda + \gamma(\|\nu-\nu_o\|) \qquad \forall \nu_o, \nu \in K_\lambda$$

D'où

$$K_\lambda \subset \{\nu \in F : \gamma(\|\nu-\nu_o\|) \leq S-\lambda\}$$

Rappelons que la fonctionnelle γ peut être choisie telle que

$$\gamma(2\tau) \geq 4\gamma(\tau)$$

(voir Chapitre 1 section 2.2)

Ce qui entraîne que K_λ est borné. Par conséquent faiblement compact. Ce qui entraîne la sup-compacité de k.

Corollaire

Soit k une fonctionnelle vérifiant les hypothèses du lemme précédent ; ℓ une autre fonctionnelle semi continue supérieurement et telle que :

$$\ell(\nu) \leq k(\nu) \quad \forall \nu \in F$$

Alors ℓ est aussi faiblement sup compact.

Démonstration

On pose

$$K_\lambda = \{\nu \in F : k(\nu) \geq \lambda\}$$

$$S_\lambda = \{\nu \in F : \ell(\nu) \geq \lambda\}$$

L'hypothèse $\ell \leq k$ entraîne que

$$S_\lambda \subset K_\lambda$$

or K_λ est faiblement compact d'après le lemme. La fonctionnelle ℓ étant s.c.s. S_λ est fermé ce qui entraîne que S_λ est faiblement compact.

5.1.2. - DESCRIPTION DE L'ALGORITHME

Considérons un triplet (L,A,B) où $A \subset E$, $B \subset F$ sont deux convexes fermés et L une fonctionnelle convexe-concave vérifiant les hypothèses :

1) Pour tout $\nu \in B$ $\quad L(.,\nu) \in \Gamma_o(E)$

pour tout $x \in A$ $\quad -L(x,.) \in \Gamma_o(F)$

L5.H) Il existe $x_o \in A$ tel que la fonctionnelle $L(x_o,.)$ soit bornée supérieurement et faiblement sup-compacte sur B.

Il existe $b \in B$ tel que la fonctionnelle $L(.,b)$ soit bornée inférieurement et inf-compacte sur A.

2) Pour tout $\nu \in B$ l'infimum :

$$\inf_{x \in A} L(x,\nu)$$

est fini et la borne inférieure est atteinte.

3) La fonctionnelle $L(x,.)$ est uniformément concave uniformément en x.

On considère l'élément $x_o \in A$ dont il est question dans les hypothèses (III.5.H).

Du fait que $L(x_o,.)$ est sup-compacte sur B, le supremum

$$f(x_o) = \sup_{\nu \in A} L(x_o,\nu) < +\infty$$

est atteint en un $\nu_o \in B$.

On considère l'infimum :

$$g(\nu_o) = \inf_{x \in A} L(x,\nu_o) > -\infty$$

qui est atteint (par hypothèse) en un $\bar{x}_o \in A$.

Alors on pose

$$L_1(x,\nu) = \begin{cases} \rho L(x_o,\nu)+(1-\rho)L(\bar{x}_o,\nu) & \text{si } x = \rho x_o+(1-\rho)\bar{x}_o,\ 0 \le \rho \le 1 \\ +\infty & \text{si } x \notin Co(x_o,\bar{x}_o) \end{cases}$$

où $Co(x_o,\bar{x}_o)$ désigne le segment $\overline{x_o\bar{x}_o}$.

Nous allons montrer au paragraphe suivant que le triplet $(L_1, Co(x_o,\bar{x}_o), B)$ admet au moins un point de selle $[x_1,\nu_1] \in A \times B$.

n+1 ième itération

Au début de la n+1 ième itération on possède deux points x_n, $x_n, \bar{x}_n \in A$ avec lesquels on définit :

$$L_{n+1}(x,\nu) = \begin{cases} \rho L(x_n,\nu)+(1-\rho)L(\bar{x}_n,\nu) & \text{si } x = \rho x_n+(1.g)\bar{x}_n \\ & 0 \leq \rho \leq 1 \\ +\infty & \text{si } x \notin Co(x_n,\bar{x}_n) \end{cases}$$

On considère le problème :

(S_{n+1}) Recherche d'un point de selle du triplet $(L_{n+1},Co(x_n,\bar{x}_n),B)$

On pose

a_{n+1} = Valeur du triplet $(L_{n+1},Co(x_n,\bar{x}_n),B)$

Si le point $[x_{n+1},\nu_{n+1}] \in A \times B$ et solution de (S_{n+1}) on défini le problème :

(SP_{n+1}) Trouver un point $\bar{x}_{n+1} \in B$ tel que

$b_{n+1} = \text{Inf } L(x,\nu_{n+1}) = L(\bar{x}_{n+1},\nu_{n+1})$.

Avec les points x_{n+1} et $\bar{x}_{n+1}$ on passe à l'itération suivante

Les problèmes (S_{n+1}) et (SP_{n+1}) seront appelés respectivement problème principale et sous problème de la n+1 ième itération.

La proposition suivante montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le problème (S_{n+1}) admet au moins un solution.

5.1.3. PROPOSITION

Si le triplet (L,A,B) vérifie les hypothèses (III.5.H), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ le triplet $(L_{n+1},Co(x_n,\bar{x}_n),B)$ admet au moins un point de selle $[x_{n+1},\nu_{n+1}] \in A \times B$.

Démonstration

Montrons d'abord que la proposition est vraie pour n = 0 ; c'est-à-dire que le triplet $(L_1, Co(x_o, \bar{x}_o), B)$ admet des points de selle.

Nous allons vérifier que le triplet $(L_1, Co(x_o, \bar{x}_o), B)$ vérifie les hypothèses du théorème (3.2.3).
On a

$$L_1(x_o, \nu) = L(x_o, \nu) \quad , \quad \forall \nu \in B$$

Donc par hypothèse la fonctionnelle $L_1(x_o, .)$ est bornée supérieurement et sup-compacte sur B.
Par ailleurs on a

$$dom(L_1(., \nu)) \subset Co(x_o, \bar{x}_o) \quad \forall \nu \in B$$

ce qui entraîne que $L_1(., \nu)$ est inf-compact.
On considère $b \in B$ (l'élément dont il est question dans les hypothèses (III.5.H)). On a par définition

$$L_1(x, b) \geq L(x, b) \quad \forall x \in A$$

Donc

$$\inf_{x \in A} L_1(x, b) \geq \inf_{x \in A} L(x, b) > -\infty$$

ce qui montre que le triplet $(L_1, Co(x_o, \bar{x}_o), B)$ vérifie toutes les hypothèses du théorème (3.2.3). Il admet donc des points de selle.

Supposons que pour $p \leq n$ les triplets $(L_p, Co(x_{p-1}, \bar{x}_{p-1}), B)$ admettent des points de selle et montrons le pour p = n+1. Nous allons montrer que le triplet $(L_{n+1}, Co(x_n, \bar{x}_n), B)$ vérifie les hypothèses du théorème (3.2.3).

On considère le point $x_n \in A$. Du fait que le point $[x_n, \nu_n] \in A \times B$ est un point de selle du triplet $(L_n, Co(x_{n-1}, \bar{x}_{n-1}), B)$ on a :

$$(2)\quad L_{n+1}(x_n,\nu) = L(x_n,\nu) \leq L_n(x_n,\nu) \leq L_n(x_n,\nu_n) = a_n \qquad \forall \nu \in B$$

donc

$$\sup_{\nu\in B} L_{n+1}(x_n,\nu) \leq a_n < +\infty$$

Par ailleurs le lemme du paragraphe (5.1.1.) entraîne que du fait que le supremum :

$$\sup_{\nu\in B} L_n(x_n,\nu) = a_n$$

est fini, la fonctionnelle $L_n(x_n,\nu)$ est faiblement sup-compacte. Or étant donné qu'on a d'après (2)

$$L_{n+1}(x_n,\nu) \leq L_n(x_n,\nu), \qquad \forall \nu \in B$$

le corollaire du même lemme entraîne que la fonctionnelle $L_{n+1}(x_n,.)$ est faiblement sup-compacte.
Par ailleurs on a

$$\text{dom } L_{n+1}(.,\nu) \subset Co(x_n,\bar{x}_n) \qquad \forall \nu \in B$$

D'où l'inf-compacité de $L_{n+1}(.,\nu)$ pour tout $\nu \in B$.
Finalement si on considère $\nu_n \in B$ on a

$$\inf_{x\in A} L_{n+1}(x,\nu_n) \geq \inf_{x\in A} L(x,\nu_n) = L(\bar{x}_n,\nu_n) > -\infty$$

Ce qui montre que toutes les hypothèses du théorème (3.2.3) sont réalisées pour le triplet $(L_{n+1},Co(x_n,\bar{x}_n),B)$. D'où le résultat.

5.2 - PROPRIETES DE L'ALGORITHME

Les hypothèses (III.5.H.) entraînent que le triplet (L,A,B) admet des points de selle, par conséquent une valeur. Soit α cette valeur.

Comme on a :

$$L(x,\nu) \leq L_n(x,\nu) \qquad \forall x \in A, \quad \forall \nu \in B$$

Il s'en suit que

$$b_n \leq \alpha \leq a_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

5.2.1 - PROPOSITION

Sous les hypothèses (III.5.H.) on a :

1°) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, inférieurement bornée par α , par conséquent convergente.

2°) Soit $\bar{\nu} \in B$ la solution (unique) du problème dual associé au triplet (L,A,B). Alors la suite $(\nu_n)_{n\in B}$ est bornée et elle vérifie :

$$(4) \quad a_n - \alpha \geq 2\delta(\|\nu_n - \bar{\nu}\|) , \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(5) \quad \alpha - b_n \geq 2\delta(\|\nu_n - \bar{\nu}\|) , \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

3°) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se trouve dans un compact (ce qui entraîne avec le fait que la suite $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, que la suite $[x_n,\nu_n] \in A \times B$ admet forcément des points d'adhérence).

Démonstration

1) Décroissance de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Le point $[x_{n+1},\nu_{n+1}] \in A \times B$ étant un point de selle du triplet $(L_{n+1},Co(x_n,\bar{x}_n),B)$ on a :

$$(6) \quad a_{n+1} = L_{n+1}(x_{n+1},\nu_{n+1}) \leq L_{n+1}(x_n,\nu_{n+1}) = L(x_n,\nu_{n+1})$$

Par ailleurs le point $[x_n,\nu_n] \in A \times B$ étant un point de selle du triplet $(L_n,Co(x_{n-1},\bar{x}_{n-1}),B)$ on a

$$(7)\quad L(x_n,\nu_{n+1}) \le L_n(x_n,\nu_{n+1}) \le L_n(x_n,\nu_n) = a_n$$

D'où on déduit avec (6) que :

$$a_{n+1} \le a_n$$

ce qui entraîne avec (3) que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un $\alpha^* \ge \alpha$.

2) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(8)\quad a_n = L_n(x_n,\nu_n) \ge L_n(x_n,\frac{\nu_n+\bar{\nu}}{2}) \ge \frac{L_n(x_n,\nu_n)+L_n(x_n,\bar{\nu})}{2} + \delta(\|\nu_n-\bar{\nu}\|)$$

par ailleurs on a

$$(9)\quad L_n(x_n,\bar{\nu}) \ge L(x_n,\bar{\nu}) \ge \operatorname*{Inf}_{x\in A} L(x,\bar{\nu}) = \alpha$$

Alors (8) et (9) entraînent

$$a_n - \alpha \ge 2\delta(\|\nu_n-\bar{\nu}\|), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

D'autre part on a

$$\alpha = \operatorname*{Inf}_{x\in A} L(x,\bar{\nu}) \ge \operatorname*{Inf}_{x\in A} L(x,\frac{\bar{\nu}+\nu_n}{2})$$

ce qui entraîne que :

$$\alpha = g(\bar{\nu}) \ge g(\frac{\bar{\nu}+\nu_n}{2}) \ge \frac{g(\bar{\nu})+g(\nu_n)}{2} + \delta(\|\nu_n-\bar{\nu}\|)$$

Or par définition on a $b_n = g(\nu_n)$.
D'où :

$$b_n - \alpha \ge 2\delta(\|\nu_n-\bar{\nu}\|) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Finalement, la relation (4), la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les propriétés de la fonctionnelle δ, entraînent que la suite $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

3) Considérons l'élément $b \in B$ dont il est question dans l'hypothèse 1) de (III.5.H.). On a :

$$L(x_n,b) \leq L_n(x_n,b) \leq L_n(x_n,\nu_n) = a_n \leq a_1$$

Alors l'inf-compacité de la fonctionnelle L(.,b) entraîne le résultat.

Corollaire

Si la suite $a_n - b_n$ converge vers zéro alors on a :

(10) 1) $\lim_{n\to\infty} \|\nu_n - \bar{\nu}\| = 0$

où $\bar{\nu}$ est la solution unique du problème dual associé au triplet (L,A,B)

2) Tout point d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution du problème primal associé au triplet (L,A,B).

Démonstration

1) Se démontre à partir des relations (3) et (4).

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$L(x_n,\nu) \leq L_n(x_n,\nu) \leq a_n \quad \forall \nu \in B$$

L'hypothèse du corollaire entraîne que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Ce qui entraîne que pour tout $\lambda > \alpha$ il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que

$$L(x_n,\nu) \leq a_n \leq \lambda \quad \forall n > n_o, \quad \forall \nu \in B$$

Alors la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle $L(.,\nu)$ entraîne que pour tout point d'adhérence $\bar{x} \in A$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a

$$L(\bar{x},\nu) \leq \lambda \quad , \quad \forall \nu \in B, \quad \forall \lambda > \alpha$$

ce qui entraîne

$$L(\bar{x},\nu) \leq \alpha \qquad \forall \nu \in B.$$

D'où le résultat.
Remarquons que le fait que le triplet (L,A,B) ait une valeur avec $\bar{x} \in \Omega_P$ et $\bar{\nu} \in \Omega_Q$ entraîne que le point $[\bar{x},\bar{\nu}]$ est un point de selle du triplet (L,A,B) (voir paragraphe 3.2.2.).

5.3 - CONVERGENCE DE L'ALGORITHME

Nous dirons que l'algorithme converge, si on a :

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$$

ce qui est justifié par le corollaire précédent.
Dans cette section nous allons chercher les conditions pour obtenir la convergence.

5.3.1. - PROPOSITION

Sous les conditions (III.5.H.) la suite $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

$$(11) \qquad \lim_{n\to\infty} \|\nu_{n+1} - \nu_n\| = 0$$

Démonstration

Le point $[x_n, \nu_n] \in A \times B$ étant un point de selle du triplet $(L_n, Co(x_{n-1}, \bar{x}_{n-1}), B)$ on a :

$$(12) \quad a_n = L_n(x_n,\nu_n) \geq L_n\left(x_n, \frac{\nu_n+\nu_{n+1}}{2}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On voit facilement que la fonctionnelle $L_n(x,.)$ est aussi uniformément concave, ayant la même fonctionnelle (U.C.) que $L(x,.)$. Par conséquent on a:

$$(13)\quad L_n\left(x_n,\frac{\nu_n+\nu_{n+1}}{2}\right) \geq \frac{L_n(x_n,\nu_n)+L_n(x_n,\nu_{n+1})}{2} + \delta(\|\nu_{n+1}-\nu_n\|),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

D'autre part, le point $[x_{n+1},\nu_{n+1}] \in A \times B$ étant un point de selle du triplet $(L_{n+1},Co(x_n,\bar{x}_n),B)$ on a :

$$L_n(x_n,\nu_{n+1}) \geq L(x_n,\nu_{n+1}) = L_{n+1}(x_n,\nu_{n+1}) \geq L_{n+1}(x_{n+1},\nu_{n+1}) = a_{n+1}$$

ce qui entraîne avec (12) et (13) que

$$a_n - a_{n+1} \geq \delta(\|\nu_{n+1}-\nu_n\|) \geq 0$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente on a :

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n+1}) = 0$$

Ce qui entraîne compte tenu des propriétés de δ que

$$\lim_{n\to+\infty} \|\nu_{n+1}-\nu_n\| = 0.$$

5.3.2. - CONDITION DE CONVERGENCE

Par définition de la fonctionnelle L_{n+1} on a :

$$L(\bar{x}_n,\nu_{n+1}) = L_{n+1}(\bar{x}_n,\nu_{n+1}) \geq L_{n+1}(x_{n+1},\nu_{n+1}) = a_{n+1}$$

D'autre part on a

$$a_{n+1} \geq \alpha \geq b_n = L(\bar{x}_n,\nu_n),\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

D'où :

$$(14)\quad L(\bar{x}_n,\nu_{n+1}) - L(\bar{x}_n,\nu_n) \geq a_{n+1}-b_n \geq a_{n+1}-\alpha \geq 0,\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ce qui entraîne que si la condition

$$(15)\quad \lim_{n\to\infty} (L(\bar{x}_n,\nu_{n+1})-L(\bar{x}_n,\nu_n)) = 0$$

est réalisée alors, d'après le corollaire de la proposition (5.2.1.), l'algorithme converge.

La relation (11) montre que la convergence de l'algorithme est intimement liée à l'uniforme continuité de la fonctionnelle L.

5.3.3. - PROPOSITION

Si en plus des hypothèses (III.5.H.) on suppose que les espaces E et F sont de dimension finie, que A est borné et que L est continue sur $A \times B$, alors l'algorithme converge.

Démonstration

La suite $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il existe un compact $K \subset B$ tel que $\nu_n \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les espaces E et F étant de dimension finie, la fonctionnelle L est uniformément continue sur $A \times K$. Ce qui entraîne, avec la relation (11), que :

$$\lim_{n\to\infty} (L(\bar{x}_n,\nu_{n+1})-L(\bar{x}_n,\nu_n)) = 0$$

Alors le corollaire de la proposition (5.2.1.) entraîne le résultat.

5.3.4. - PROPOSITION

Si en plus des hypothèses (III.5.H.), on suppose que les espaces E et F sont de dimension finie, que la fonctionnelle L est continue sur $A \times B$ et que la fonctionnelle $L(.,\nu)$ est uniformément convexe, uniformément en ν, alors la relation (15) est vérifiée. Par conséquent, l'algorithme décrit en 5.1.2. converge.

Démonstration

Nous allons montrer que la suite $(\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (pour la norme d'espace de dimension finie).
Par définition on a :

$$(16)\quad b_n = \text{Inf } L(x,\nu_n) = L(\bar{x}_n,\nu_n) \leq L(\frac{\bar{x}_n+\bar{x}}{2},\nu_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

où $\bar{x} \in A$ est la solution (dans ce cas) unique du problème primal associé au triplet (L,A,B).

L'uniforme convexité de $L(.,\nu)$ entraîne :

$$(17)\quad L(\frac{\bar{x}_n+\bar{x}}{2},\nu_n) \leq \frac{L(\bar{x}_n,\nu_n)+L(\bar{x},\nu_n)}{2} - \gamma(\|x_n-\bar{x}\|) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

où γ est une fonctionnelle (U.C.) de $L(.,\nu)$.
Par ailleurs $\bar{x}$ étant la solution du problème (P) on a

$$L(\bar{x},\nu_n) \leq \alpha \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ce qui entraîne avec (16) et (17) que :

$$(18)\quad \alpha - b_n \geq 2\gamma(\|\bar{x}_n-\bar{x}\|) \geq 0.$$

Les hypothèses de continuité et d'uniforme convexité entraînent que la suite b_n est bornée. Alors la relation (18) entraîne qu'il en est de même pour la suite $(\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, Il existe alors un compact $T \subset A$ contenant la suite $(\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par ailleurs, la suite $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée (voir 5.2.1.) il existe un compact $K \subset B$ qui la contient. Alors l'uniforme continuité de L sur $T \times K$ entraîne le résultat.

Remarque

Le résultat de la proposition (5.4.1) peut être généralisé pour un cas particulièrement intéressant à des espaces E et F de Banach. En effet, soit L est de la forme

$$L(x,\nu) = f(x)+G(x,\nu)$$

où $f \in \Gamma_o(E)$ est uniformément convexe et G une fonctionnelle convexe uniformément concave et uniformément continue sur tout borné de $A \times B$. On montre, de la même manière que pour la proposition (5.4.1.) que la suite $(\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée et que la relation (14) est vérifiée.

Exemple

Considérons le lagrangien du paragraphe 3.1.7. en supposant que f est uniformément convexe et que l'application $S : I \times E \to \mathbb{R}$ soit continue est bornée sur tout ensemble de la forme $I \times C$ où C est un convexe fermé borné de E (On suppose que E est un espace de Banach). Alors le lagrangien régularisé

$$L_n(x,\nu) = f(x)+\langle\nu,S(.,x)\rangle - \frac{1}{2n}\|\nu\|^2$$

vérifie toutes les hypothèses de la remarque précédente.

5.4 - ESTIMATION DE L'ERREUR

La relation (3) montre que lorsque l'écart entre a_n et b_n est suffisamment petit, on peut considérer a_n comme une valeur approchée de la valeur du triplet (L,A,B).

Dans la pratique, lors des calculs, on peut faire le test d'arrêt à l'aide de la relation (14) comme le montre la proposition suivante.

5.4.1. - PROPOSITION

Si pour un $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$L(\bar{x}_n, \nu_{n+1}) - L(\bar{x}_n, \nu_n) < \varepsilon$$

alors on a

1°) $\quad 0 \leq a_{n+1} - \alpha < \varepsilon$

2°) $\quad 0 \leq \alpha - b_n < \varepsilon$

3°) $\quad \delta(\|\nu_{n+1} - \bar{\nu}\|) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad$ (où $\Omega_Q = \{\bar{\nu}\}$)

Si en plus des hypothèses (III.5.H.) la fonctionnelle $L(.,\nu)$ est uniformément convexe uniformément en ν , alors on a

4°) $\quad \gamma(\|\bar{x}_n - \bar{x}\|) < \frac{\varepsilon}{2}$

5°) $\quad \gamma(\|x_{n+1} - \bar{x}\|) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

où $\Omega_P = \{\bar{x}\}$ et γ est une fonctionnelle (U.C.) de $L(.,\nu)$.

Démonstration

1°) et 2°) se déduisent directement de la relation (14)

3°) se déduit de la relation (4)

4°) se déduit de la relation (18)

5°) on a :

$$(19) \qquad b_n = \inf_{x \in A} L(x, \nu_n) = L(\bar{x}_n, \nu_n) \leq L\left(\frac{x_{n+1} + \bar{x}}{2}, \nu_n\right)$$

L'uniforme convexité de la fonctionnelle $L(.,\nu_n)$ entraîne :

$$(20) \qquad L\left(\frac{x_{n+1} + \bar{x}}{2}, \nu_n\right) \leq \frac{L(x_{n+1}, \nu_n) + L(\bar{x}, \nu_n)}{2} - \gamma(\|x_{n+1} - \bar{x}\|)$$

Le point $\bar{x} \in A$ étant la solution du problème (P) associé au triplet (L,A,B) on a :

$$(21) \qquad L(\bar{x}, \nu_n) \leq \alpha \leq a_{n+1}$$

Par ailleurs le point $[x_{n+1}, \nu_{n+1}] \in A \times B$ étant un point de selle du triplet $(L_{n+1}, Co(x_n, \bar{x}_n), B)$ on a

$$L(x_{n+1}, \nu_n) \leq L_{n+1}(x_{n+1}, \nu_n) \leq L_{n+1}(x_{n+1}, \nu_{n+1}) = a_{n+1}$$

ce qui entraîne avec (19) (10) et (21) que

$$a_{n+1} - b_n \geq 2\gamma(\|x_{n+1} - \bar{x}\|)$$

D'où le résultat.

Remarque

La proposition précédente montre que le test

$$(22) \qquad L(\bar{x}_n, \nu_{n+1}) - L(\bar{x}_n, \nu_n) \leq \varepsilon$$

est déterminant. Autrement dit, même lorsque la convergence de l'algorithme ne peut être démontrée, la réalisation de la relation (22), seule suffit pour affirmer que l'on est assez proche des solutions.

5.5. GENERALISATION DU PROCEDE DECRIT EN 5.1.2.

On pourrait généraliser l'algorithme décrit en 5.1.2 de la manière suivante :

Au début de la n+1 ième itération on possède 2k points

x_n^i , $\bar{x}_n^i$ $\quad i=1,\ldots,k$

On considère un vecteur $\rho \in \mathbb{R}^{2k}$ de composantes $\rho = (\rho_1,\ldots,\rho_k, \bar{\rho}_1,\ldots, \bar{\rho}_k)$. pour tout $x \in Co(\bigcup_{i=1}^{k} \{x_i,\bar{x}_i\})$ on considère le sous ensemble de $\mathbb{R}^{2k}$.

$$I_x = \{\rho \in \mathbb{R}^{2k} : \sum_{i=1}^{k} (\rho_i+\bar{\rho}_i) = 1 \quad , \quad \sum_{i=1}^{k} (\rho_i x_n^i+\bar{\rho}_i \bar{x}_n^i) = x \ ,$$

$$0 \leq \rho_i \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \bar{\rho}_i \leq 1 \quad , \quad i=1,\ldots,k\}$$

On définit :

$$L_{n+1}(x,) = \begin{cases} \inf_{\rho \in Ix} \sum_{i=1}^{k} (\rho_i L(x_n^i,\nu)+\bar{\rho}_i L(\bar{x}_n^i,\nu)) & \text{si } x \in Co(\bigcup_{i=1}^{k}\{x_n^i,\bar{x}_n^i\}) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et on définit le problème suivant :

(S_{n+1})

> Recherche d'un point de selle du triplet
>
> $(L_{n+1}, Co(\bigcup_{i=1}^{k} \{x_n^i,\bar{x}_n^i\}), B)$
>
> (On note par a_{n+1} la valeur du triplet)

Si le point $[x_{n+1},\nu_{n+1}] \in A \times B$ est une solution du problème (S_{n+1}) on définit le problème suivant :

(SP_{n+1})

> Trouver un point $\bar{x}_{n+1} \in A$ tel que
>
> $b_{n+1} = \inf_{x \in A} L(x,\nu_{n+1}) = L(\bar{x}_{n+1},\nu_{n+1})$

On choisit arbitrairement un indice $1 \leq i_{n+1} \leq k$ et on considère les 2k points suivants :

$$x^{i}_{n+1} = x^{i}_{n} \quad , \quad \bar{x}^{i}_{n+1} = x^{i}_{n} \quad \text{si} \quad i \neq i_{n+1}$$

$$\bar{x}^{i_{n+1}}_{n+1} = x_{n+1} \quad , \quad \bar{x}^{i_{n+1}}_{n+1} = \bar{x}_{n+1}$$

On passe à l'itération suivante :

L'algorithme décrit en 5.1.2 est le cas particulier pour k=1 de celui qu'on vient de décrire.

Tous les résultats obtenus dans les sections (5.1), (5.2) (5.3) et (5.4) sont valables pour $k \in \mathbb{N}$ quelconque.

5.6. CALCULS INTERMEDIAIRES

Résolution du problème (S_{n+1}) lorsque k=1 (voir paragraphe 5.1.2)

Rappelons le problème (S_{n+1})

(S_{n+1}) Recherche d'un point de selle du triplet $(L_{n+1}, Co(x_n, \bar{x}_n), B)$:

$$L_{n+1}(x,\nu) = \begin{cases} \rho L(x_n,\nu)+(1-\rho)L(\bar{x}_n,\nu) & \text{si } x = \rho x_n(1-\rho)\bar{x}_n \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Vu les hypothèses (III.5.H.) faites sur le triplet (L,A,B) le problème (S_{n+1}) revient à chercher les points de selle du triplet (S,I,B).
Où S est une fonctionnelle définie sur $\mathbb{R} \times F$ de la forme :

$$S(\rho,\nu) = \rho p(\nu)+(1-\rho)q(\nu)$$

et les fonctionnelles $p,q : F \to \mathbb{R}$ sont semi-continue supérieurement et uniformément concaves.
I est l'intervalle $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

Nous supposons en plus que les fonctionnelles p et q sont bornées supérieurement sur B. Ce qui entraîne qu'elles sont faiblement sup-compactes (voir paragraphe 5.1.1.).

Dans ces conditions le triplet (S,I,B) admet au moins un point de selle.
On pose

$$p(\nu_p) = \sup_{\nu \in B} p(\nu) \qquad \text{avec } \nu_p \in B$$

$$q(\nu_q) = \sup_{\nu \in B} q(\nu) \qquad \text{avec } \nu_q \in B$$

5.6.1. - PROPOSITION

1°) si $p(\nu_p) \leq q(\nu_p)$ alors le point $[1,\nu_p]$ est point de selle

2°) si $q(\nu_q) \leq q(\nu_p)$ alors le point $[0,\nu_q]$ est point de selle

3°) si $p(\nu_p) > q(\nu_p)$ et $q(\nu_q) > p(\nu_q)$

Alors le point de selle $[\bar{\rho},\bar{\nu}] \in \mathbb{R} \times B$ du triplet(S,I,B) vérifie

$$0 \neq \bar{\rho} \neq 1, \quad p(\bar{\nu}) = q(\bar{\nu})$$

Démonstration

1°) $p(\nu_p) \leq q(\nu_p)$ entraîne

$$p(\nu) \leq p(\nu_p) \leq \rho p(\nu_p)+(1-\rho)q(\nu_p), \ \forall \rho \in I, \ \forall \nu \in B$$

ce qui n'est autre que

$$S(1,\nu) \leq S(1,\nu_p) \leq S(\rho,\nu_p) \qquad \forall \rho \in I \quad \forall \nu \in B$$

2°) $q(\nu_q) \leq p(\nu_q)$ entraîne

$$q(\nu) \leq q(\nu_q) \leq \rho p(\nu_q)+(1-\rho)q(\nu_q) \quad \forall \rho \in I, \quad \forall \nu \in B,$$

ce qui n'est autre que :

$$S(0,\nu) \leq S(0,\nu_q) \leq S(\rho,\nu_q) \quad \forall \rho \in I, \quad \forall \nu \in B.$$

3°) Montrons d'abord que dans ce cas on a $\bar{\rho} \neq 0$. Si $\bar{\rho} = 0$ on aurait

$$S(0,\nu) \leq S(0,\bar{\nu}) \leq S(\rho,\bar{\nu}) \qquad \forall \rho \in I \quad \forall \nu \in B$$

ce qui entraîne

$$q(\nu) \leq q(\bar{\nu}) \leq \rho q(\bar{\nu})+(1-\rho)p(\bar{\nu}) \quad \forall \rho \in I, \quad \forall \nu \in B$$

Ce qui entraîne avec l'uniforme concavité que $\bar{\nu} = \nu_q$ et que :

$$q(\nu_q) \leq p(\nu_q)$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.
On montre de la même manière que $\bar{\rho} \neq 1$.

Par ailleurs, le fait que $[\bar{\rho},\bar{\nu}]$ soit un point de selle du triplet (S,I,B)

entraîne que :

$$S(\bar{\rho},\bar{\nu}) \leq S(0,\bar{\nu}) = q(\bar{\nu})$$

$$S(\bar{\rho},\bar{\nu}) \leq S(1,\bar{\nu}) = p(\bar{\nu})$$

Or $\bar{\rho}$ étant compris entre 0 et 1 on a

$$\text{Min}(p(\bar{\nu}),q(\bar{\nu})) \leq S(\bar{\rho},\bar{\nu}) \leq \text{Max}(p(\bar{\nu}),q(\bar{\nu}))$$

ce qui ne peut être vrai que si on a $p(\bar{\nu}) = q(\bar{\nu})$.

Corollaire

Avec les mêmes notations que la proposition précédente, si on a :

$$p(\nu_p) > q(\nu_p)$$

et

$$q(\nu_q) > p(\nu_q)$$

alors $\bar{\nu}$ est tel que

$$\sup_{\nu \in D} p(\nu) = \sup_{\nu \in D} q(\nu) = p(\bar{\nu}) = q(\bar{\nu})$$

où

$$D = \{\nu \in B : p(\nu) = q(\nu)\}$$

Démonstration : évidente.

Remarque

Le problème

$$\sup_{\nu \in D} p(\nu)$$

n'est pas un problème convexe en général.

En effet, l'ensemble D n'est pas toujours convexe. Nous utiliserons ce corollaire plus tard dans un cas où D est convexe.

5.6.2. - PROPOSITION

Si f est un espace de dimension finie et si les fonctionnelles p et q sont continues sur B, alors la fonctionnelle :

$$h(\rho) = \sup_{\nu \in B} S(\rho,\nu)$$

est dérivable pour tout $\rho \in]0,1[$ et on a

$$\frac{dh(\rho)}{d\rho} = p(\nu_\rho) - q(\nu_\rho)$$

où $\nu_\rho \in B$ est le point unique qui réalise

$$\sup_{\nu \in B} S(\rho,\nu) = S(\rho,\nu_\rho)$$

Démonstration

On rappelle le théorème suivant (voir [1]).
Soit $f_\alpha \in \Gamma(\mathbb{R}^m)$, $\alpha \in A$, une famille de fonctionnelles et A un compact quelconque. Posons $f = \sup f_\alpha$.
Supposons qu'il existe un ouvert θ de $\mathbb{R}^m$ tel que l'application :
$(\alpha,x) \in A \times \theta \to f_\alpha(x)$ soit finie est continue.
Alors en tout point $x_o \in \theta$ on a

i) f continue

ii) $\partial f(x_o) = \overline{\text{Co}} \left(\bigcup_{\alpha \in T(x_o)} \partial f_\alpha(x_o) \right)$

où

$$T(x_o) = \{\alpha \in A : f(x_o) = f_\alpha(x_o)\}$$

Nous allons appliquer ce résultat.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ la valeur du triplet (S,I,B). Alors on a

$$h(\rho) \geq \alpha \ , \quad \forall \rho \in [0,1]$$

Ce qui entraîne que pour tout $\rho \in [0,1]$, l'ensemble

$$K_\rho = \{\nu \in B : S(\rho,\nu) \geq \alpha\}$$

est non vide. On a alors

$$h(\rho) = \sup_{\nu \in B} S(\rho,\nu) = \sup_{\nu \in K_\rho} S(\rho,\nu)$$

Par ailleurs pour tout ρ compris entre 0 et 1 on a

$$K_\rho \subset \{\nu \in B : S(0,\nu) \geq \alpha\} \cup \{\nu \in B \; S(1,\nu) \geq \alpha\} = K$$

On a donc

$$h(\rho) = \sup_{\nu \in K} S(\rho,\nu)$$

Or les fonctionnelles $q(\nu) = S(0,\nu)$ et $p(\nu) = S(1,\nu)$ étant sup-compacts on déduit que K est compact. Par conséquent toutes les hypothèses du théorème que l'on vient d'énoncer sont réalisées.
Alors on a

$$\partial h(\rho) = \overline{Co}\Big(\bigcup_{\nu \in T(\rho)} \partial_1 S(\rho,\nu)\Big), \quad \forall \rho \in]0,1[$$

où ∂_1 désigne l'opérateur sous différentiel par rapport à la première variable.
L'uniforme concavité de la fonctionnelle $S(\rho,.)$ entraîne que l'ensemble

$$T(\rho) = \{\nu \in B : S(\rho,\nu) = h(\rho)\}$$

est réduit a un point $\nu_\rho \in B$.
Par ailleurs

$$\partial S_1(\rho,\nu_\rho) = p(\nu_\rho) - q(\nu_\rho)$$

ce qui entraîne le résultat.

5.7 - APPLICATION DU PROCEDE DECRIT EN 5.1.2 A DEUX PROBLEMES DE REGULARISATION PARTIELLE

5.7.1 - Considérons l'exemple du paragraphe 4.1.3 où on avait le triplet $(L^r, K, (\mathbb{R}_+)^m)$ avec :

$$L^r(x,\nu) = \begin{cases} f(x) + \sum_{i=1}^{m} \nu_i g_i(x) - \frac{1}{2r} \sum_{i=1}^{m} \nu_i^2 & \text{si } \nu_i \geq 0 \quad i = 1,\dots,m \\ +\infty & \text{si } x \notin \text{dom } f \\ -\infty & \text{si } x \in \text{dom } f \quad \nu \notin (\mathbb{R}_+)^m \end{cases}$$

On sait d'après la remarque du paragraphe (5.3.4) que si f est une fonctionnelle uniformément convexe et si les fonctionnelles $g_i(x)$ sont bornées sur tout fermé borné de K alors l'algorithme décrit en (5.1.2) converge.

Nous allons expliciter les calculs.
A la nième itération on a :

1) $[x_n, \nu_n] \in K \quad (\mathbb{R}_+)^m$ point de selle du triplet

$(L_n^r, Co(x_{n-1}, \bar{x}_{n-1}), (\mathbb{R}_+)^m)$

2) $\bar{x}_n \in K$ tel que

$L^r(\bar{x}_n, \nu_n) \leq L^r(x, \nu_n) \quad \forall x \in K$

On définit

$$L_{n+1}^r(x,\nu) = \begin{cases} \rho L^r(x_n,\nu) + (1-\rho) L^r(\bar{x}_n,\nu) & \text{si } x = \rho x_n + (1-\rho)\bar{x}_n \\ +\infty & \text{si } x \notin Co(x_n, \bar{x}_n) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \rho f(x_n)+(1-\rho)f(\bar{x}_n)+\sum_{i=1}^{m} \nu_i[\rho g_i(x_n)+(1-\rho)g_i(\bar{x}_n)]-\frac{1}{2r}\sum_{i=1}^{m}\nu_i^2 \\ +\infty \qquad\qquad \text{si } x \notin Co(x_n,\bar{x}_n) \end{cases}$$

On pose

$$p_n^r(\nu) = L^r(x_n,\nu) = f(x_n)+\sum_{i=1}^{m} \nu_i g_i(x_n)-\frac{1}{2r}\sum_{i=1}^{m}\nu_i^2$$

$$q_n^r(\nu) = L^r(\bar{x}_n,\nu) = f(\bar{x}_n)+\sum_{i=1}^{m} \nu_i g_i(\bar{x}_n)-\frac{1}{2r}\sum_{i=1}^{m}\nu_i^2$$

$$S_{n+1}^r(\rho,\nu) = \rho p_n^r(\nu)+(1-\rho)q_n^r(\nu) \qquad 0 \le \rho \le 1,\ \nu \in \mathbb{R}_+^m$$

$$h_{n+1}^r(\rho) = \sup_{\nu\in\mathbb{R}_+^m} S_{n+1}^r(\rho,\nu)$$

$$g_{n+1}^r(\nu) = \inf_{0\le\rho\le1} S_{n+1}^r(\rho,\nu)$$

$$p_{n+1}^r(\nu_p) = \sup_{\nu\in\mathbb{R}_+^m} p_{n+1}^r(\nu)$$

$$q_{n+1}^r(\nu_q) = \sup_{\nu\in\mathbb{R}_+^m} q_{n+1}^r(\nu)$$

Calculer les points de selle du triplet $(L_{n+1}^r, Co(x_n,\bar{x}_n), \mathbb{R}_+^m)$ revient à calculer les points de selle du triplet $(S_{n+1}^r, I, \mathbb{R}_+^m)$ où I est l'intervalle $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

On pose aussi

$$a_{n+1}^r = \text{valeur du triplet } (S_{n+1}^r, I, \mathbb{R}_+^m)$$

Un calcul simple permet de voir que le supremum

$$\sup_{\nu\in\mathbb{R}_+^m} S_{n+1}^r(\rho,\nu)$$

est atteint en un vecteur $\nu_\rho \in \mathbb{R}_+^m$ dont les composantes sont

$$\nu_{\rho i} = r[\rho g_i(x_n)+(1-\rho)g_i(\bar{x}_n)]_+$$

où

$$[\tau]_+ = \text{Max}(0,\tau)$$

ce qui permet d'écrire :

$$p_n^r(\nu_p) = f(x_n)+\frac{r}{2}\sum_{i=1}^m [g_i(x_n)]_+^2$$

$$q_n^r(\nu_q) = f(\bar{x}_n)+\frac{r}{2}\sum_{i=1}^m [g_i(\bar{x}_n)]_+^2$$

$$p_n^r(\nu_q) = f(x_n)+r\sum_{i=1}^m g_i(x_n)[g_i(\bar{x}_n)]_+-\frac{r}{2}\sum_{i=1}^m [g_i(\bar{x}_n)]_+^2$$

$$q_n^r(\nu_p) = f(\bar{x}_n)+r\sum_{i=1}^m g_i(\bar{x}_n)[g_i(x_n)]_+-\frac{r}{2}\sum_{i=1}^m [g_i(x_n)]_+$$

La proposition (5.6.1.) permet d'affirmer que :

. Si $p_{n+1}^r(\nu_p) \leq q_{n+1}^r(\nu_p)$ alors le point $[1,\nu_p]$ est point de selle du triplet $(S_{n+1}^r, I, \mathbb{R}_+^m)$.

. Si $q_{n+1}^r(\nu_q) \leq p_{n+1}^r(\nu_q)$ alors le point $[0,\nu_q]$ est point de selle du triplet $(S_{n+1}^r, I, \mathbb{R}_+^m)$.

. Si on a $p_{n+1}^r(\nu_p) > q_{n+1}^r(\nu_p)$ et $q_{n+1}^r(\nu_q) > p_{n+1}^r(\nu_q)$.

Nous proposons deux méthodes pour calculer le point de selle $[\rho_{n+1},\nu_{n+1}] \in I \times \mathbb{R}_+^m$ du triplet $(S_{n+1}^r, I, \mathbb{R}_+^m)$.

1) Par la dérivée de la fonctionnelle h^r_{n+1} la proposition (5.6.2.) la dérivée de h^r_{n+1} est :

$$\frac{dh^r_{n+1}(\rho)}{d\rho} = p^r_{n+1}(\nu_\rho) - q^r_{n+1}(\nu_\rho)$$

où ν_ρ est le vecteur de $\mathbb{R}^m_+$ dont les composantes $\nu_{\rho i}$ vérifient

$$\nu_{\rho i} = r[\rho g_i(x_n) + (1-\rho) g_i(\bar{x}_n)]_+$$

On a donc :

$$\frac{dh^r_{n+1}(\rho)}{d\rho} = f(x_n) - f(\bar{x}_n) + r \sum_{i=1}^{m} (g_i(x_n) - g_i(\bar{x}_n))[\rho g_i(x_n) + (1-\rho) g_i \bar{x}$$

Ce qui est une quantité facilement calculable.

On utilise alors une méthode de descente en se servant de la dérivée pour calculer le point $\rho_{n+1} \in I$ qui minimise la fonctionnelle convexe h^r_{n+1} dans I.
La proposition 5.6.1. entraîne que dans ces conditions on a

$$0 \neq \rho_{n+1} \neq 1 \text{ et } p^r_{n+1}(\nu_{n+1}) = q^r_{n+1}(\nu_{n+1})$$

Alors le point $\nu_{n+1} \in \mathbb{R}^m_+$ vérifie forcément

$$\sup_{\nu \in \mathbb{R}^m_+} S_{n+1}(\rho_{n+1}, \nu) = S^r_{n+1}(\rho_{n+1}, \nu_{n+1}) = a^r_{n+1}$$

On a donc les composantes de ν_{n+1}

$$\nu_{n+1,i} = r[\rho_{n+1} g_i(x_n) + (1-\rho_{n+1}) g_i(\bar{x}_n)]_+ \quad i = 1, \ldots, m.$$

2) Le corollaire de la proposition 5.6.1. montre que le point ν_{n+1} vérifie

$$\sup_{\nu\in D} p^r_{n+1}(\nu) = \sup_{\nu\in D} q^r_{n+1}(\nu) = p^r_{n+1}(\nu_{n+1}) = a^r_{n+1}$$

où

$$D = \{\nu\in \mathbb{R}^m_+ : p^r_{n+1}(\nu) = q^r_{n+1}(\nu)\}$$

Dans ce cas on a :

$$D = \{\nu \in \mathbb{R}^m_+ : \Sigma\nu_i(g_i(x_n)-g_i(\bar{x}_n)) = f(\bar{x}_n)-f(x_n)\}$$

Donc D est convexe. Par conséquent le problème

$$\sup_{\nu\in D} p^r_{n+1}(\nu)$$

est un problème convexe.

Si on calcule ν_{n+1} par cette méthode et si $\nu_{n+1} \neq 0$ c'est-à-dire s'il existe $i \leq m$ tel que $\nu_{n+1,i} \neq 0$ on calcule ρ_{n+1} de la formule

$$\nu_{n+1,i} = r[\rho_{n+1}\, g_i(x_n)+(1-\rho_{n+1})g_i(\bar{x}_n)]_+$$

Si par contre on a $\nu_{n+1} = 0$ alors on calcule ρ_{n+1} de la formule

$$a^r_{n+1} = p^r_{n+1}(\nu_{n+1}) = \rho_{n+1}\, f(x_n)+(1-\rho)f(\bar{x}_n)$$

Une fois ρ_{n+1} calculé, on calcule x_{n+1} par

$$x_{n+1} = \rho_{n+1}\, x_n+(1-\rho_{n+1})\bar{x}_n$$

5.7.2. - On considère l'exemple précédent avec la régularisation par translation avec la fonctionnelle $H(\nu) = \frac{1}{2}\|\nu\|^2$. On considère un vecteur $\nu^r \in \mathbb{R}^m_+$

$$L^r(x,\nu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \nu_i g_i(x) - \frac{1}{2}\|\nu-\nu^r\|^2$$

à la nième itération on a un point $[x_n,\nu_n] \in A \times B$ et un point $\bar{x}_n \in A$.
On pose

$$L^r(x,\nu) = \begin{cases} \rho L^r(x_n,\nu)+(1-\rho)L(\bar{x}_n,\nu) & \text{si } x = \rho x_n+(1-\rho)\bar{x}_n \\ +\infty & \text{si } x \notin Co(x_n,\bar{x}_n) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \rho f(x_n)+(1-\rho)f(\bar{x}_n)+\sum_{i=1}^{m} \nu_i(\rho g_i(x_n)+(1-\rho)g_i(\bar{x}_n))-\frac{1}{2}\Sigma(\nu_i-\nu_i)^2 \\ +\infty & \text{si } x \notin Co(x_n,\bar{x}_n) \end{cases}$$

Avec les mêmes notations que le paragraphe précédent.
On pose

$$p^r_{n+1}(\nu) = L^r(x_n,\nu)$$

$$q^r_{n+1}(\nu) = L^r(\bar{x}_n,\nu)$$

$$S^r_{n+1}(\rho,\nu) = \rho p^r_{n+1}(\nu)+(1-\rho)q^r_{n+1}(\nu) \qquad 0 \le \rho \le 1,\ \nu \in \mathbb{R}^m_+$$

$$h^r_{n+1}(\rho) = \sup_{\nu\in\mathbb{R}_+} S^r_{n+1}(\rho,\nu) = S^r_{n+1}(\rho,\nu_\rho)$$

où les composantes de ν_ρ sont

$$\nu_{\rho,i} = [\rho g_i(x_n)+(1-\rho)g_i(x_n)+\nu_i^r]_+ \qquad i = 1,\ldots,m.$$

Pour les points ν_p et ν_q qui réalisent respectivement le maximum de p_{n+1}^r et celui de q_{n+1}^r sur $\mathbb{R}_+^m$ on a

$$\nu_{p,i} = [g_i(x_n)+\nu_i^r]_+ \qquad i = 1,\ldots,m$$

$$\nu_{q,i} = [g_i(\bar{x}_n)+\nu_i^r] \qquad i = 1,\ldots,m$$

On a

$$p_{n+1}^r(\nu_p) = f(x_n)+\sum_{i=1}^m \{g_i(x_n)[g_i(x_n)+\nu_i^r]_+-\tfrac{1}{2}([g_i(x_n)+\nu_i^r]_+-\nu_i^r)^2\}$$

$$q_{n+1}^r(\nu_q) = f(\bar{x}_n)+\sum_{i=1}^m \{g_i(\bar{x}_n)[g_i(\bar{x}_n)+\nu_i^r]_+-\tfrac{1}{2}([g_i(\bar{x}_n)+\nu_i^r]_+-\nu_i^r)^2\}$$

$$p_{n+1}^r(\nu_q) = f(x_n)+\sum_{i=1}^m \{g_i(x_n)[g_i(\bar{x}_n)+\nu_i^r]_+-\tfrac{1}{2}([g_i(\bar{x}_n)+\nu_i^r]_+-\nu_i^r)^2\}$$

$$q_{n+1}^r(\nu_p) = f(\bar{x}_n)+\sum_{i=1}^m \{g_i(\bar{x}_n)[g_i(x_n)+\nu_i^r]_+-\tfrac{1}{2}([g_i(x_n)+\nu_i^r]_+-\nu_i^r)^2\}$$

$$h_{n+1}^r(\rho) = \rho f(x_n)+(1-\rho)f(\bar{x}_n)+\sum_{i=1}^m (\rho g_i(x_n)+(1-\rho)g_i(\bar{x}_n))$$

$$[\rho g_i(x_n)+(1-\rho)g_i(\bar{x}_n)+\nu_i^r]_+-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^m ([\rho g_i(x_n)+(1-\rho)g_i(\bar{x}_n)+\nu_i^r]_+-\nu$$

De la même manière qu'au paragraphe précédent on calcule

$$\frac{dh^r_{n+1}(\rho)}{d\rho} = f(x_n)-f(\bar{x}_n)+\sum_{i=1}^{m}(g_i(x_n)-g_i(\bar{x}_n))[\rho g_i(x_n)+(1-\rho)g_i(\bar{x}_n)+\nu^r_i]_+$$

Alors on applique les propositions (5.6.1.) et (5.6.2.) de la même manière qu'au paragraphe précédent pour calculer le point de selle $[\rho_{n+1},\nu_{n+1}] \in I \times \mathbb{R}^m_+$ du triplet $(S^r_{n+1},I,\mathbb{R}^m_+)$.

ANNEXE

Application du procédé de régularisation par translation à quelques problèmes numériques.

Problème :

Nous nous proposons de résoudre numériquement des problèmes du type :

(S) Recherche des points de selle du triplet $(L,\mathbb{R}^n,(\mathbb{R}_+)^m)$ où L est de la forme :

$$L(x,v) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + \sum_{i=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} v_i g_i(x)$$

Nous appliquerons la méthode de régularisation par translation voir paragraphes (4.2.2) et (5.7.2).

On définit ainsi le problème :

(S^r) Recherche d'un point de selle du triplet $(L^r,\mathbb{R}^n,(\mathbb{R}_+)^m)$ où

$$L^r(x,v) = L(x,v) + H(v-v^{r-1})$$

A chaque problème S^r nous appliquons l'algorithme décrit au paragraphe (5.1.2)

Si le point $[x^r,v^r] \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_+)^m$ est une solution du problème S^r alors pour le problème S^{r+1} on part du point initial $x_o = x^r$ (Voir (5.1.2)).

TEST 1

En calculant le point de selle du triplet $(S^r, \mathbb{R}^n, (\mathbb{R}_+)^m)$ par l'algorithme du paragraphe (5.1.2) on fait le test d'arrêt

$$(L^r(\bar{x}_n, v_{n+1}) - L^r(\bar{x}_n, v_n)) \leq \varepsilon_1$$

voir (5.3.2).

Sur le tableau des résultats nous donnons les solutions pour les problèmes S^r
avec : r=1,2,4,5,10,20,...
par XO on désigne le point x^r
par VO on désigne le point v^r
par WO on désigne le point v^{r-1}
par ALF ou VALEUR on désigne la valeur du triplet $(L^r, \mathbb{R}^n, (\mathbb{R}_+)^m)$

Les régularisations que l'on considère sont :

$$H(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} v_i$$

et

$$H(v) = \sum_{j=1}^{m} (e^{v_i} - v_i - 1)$$

Problème 1

$$n = 5 \quad ; \quad m = 5$$

$$g_1(x) = \sum_{j=1}^{5} x_j^2 - 100$$

$$g_2(x) = \sum_{j=1}^{5} j x_j - 15$$

$$g_3(x) = x_1^2 - 5x_3$$

$$g_4(x) = \mathrm{Exp}((x_1^2 + x_5).10^{-7}) - 20$$

$$g_5(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3 - 5x_4$$

$c_1 = -9$, $c_2 = -23$, $c_3 = -10$, $c_4 = 6$, $c_5 = -11$

Point initial pour $r = 1$: $x_o = 0$. $v^o = 0$

Solution exacte :

$$\bar{x} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \in \mathbb{R}^5 \qquad \bar{v} = \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} \in \mathbb{R}^5$$

Valeur du triplet $(L, \mathbb{R}^5, (\mathbb{R}_+)^5) = -44{,}5$

Problème 2

$n = 20$ $\qquad\qquad$ $m = 11$

$$g_1(x) = \sum_{j=1}^{20} jx_j - 400$$

$$g_2(x) = \sum_{j=1}^{20} jx_j^2 - 210$$

$$g_3(x) = \sum_{j=1}^{20} (0{,}0001 \times 2^j \times x_j^2) - 909{,}715$$

$$g_4(x) = \sum_{j=1}^{20} \frac{10}{2^j} x_j^2 + 10x_j - (310 - \frac{10}{2^{20}})$$

$$g_5(x) = 3x_1^2 + 7x_2^2 - 8x_3 + 6x_4^2 - 8$$

$$g_6(x) = 6x_5^2 + 21x_6^2 + 2x_7 - 9x_8 - 20$$

$$g_7(x) = -3x_9 + 2x_{10}^2 + 6x_{11} + x_{12}^2 - 6$$

$$g_8(x) = 4x_1^2 - 7x_4 + 15x_{17}^2 + 12x_{20}^2 - 24$$

$$g_9(x) = \sum_{j=1}^{20} x_j^2 - 100$$

$$g_{10}(x) = 9x_1^2 - 22x_{13} + 8x_{19}^2 + 18\, x_5^2 - 50$$

$$g_{11}(x) = x_7 + x_9^2 - x_{11} + 2x_{20}^2 - 19$$

$c_1 = -38,4$ $\quad$ $c_{11} = -313,2$

$c_2 = -64$ $\quad$ $c_{12} = -338,4$

$c_3 = -81$ $\quad$ $c_{13} = -365$

$c_4 = -113,4$ $\quad$ $c_{14} = -393$

$c_5 = -148,2$ $\quad$ $c_{15} = -421$

$c_6 = -194,2$ $\quad$ $c_{16} = -449$

$c_7 = -198,2$ $\quad$ $c_{17} = -449$

$c_8 = -219,6$ $\quad$ $c_{18} = -505$

$c_9 = -250,9$ $\quad$ $c_{19} = -533$

$c_{10} = -283,8$ $\quad$ $c_{20} = -580,2$

Point initial pour r = 1 :

$x_o = (x_{o,j})$ $\quad$ $x_{o,j} = 3 \quad j=1,\ldots,20$

$v^o = (v_i^o)$ $\quad$ $v_i^o = 0 \quad i=1,\ldots,11$ pour $H(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{11} v_i$

$v_i^o = 5 \quad i=1,\ldots,11$ pour $H(v) = \sum_{i=1}^{11} (e^{v_i} - v_i - 1)$

Solution exacte :

$\bar{x} = (\bar{x})_j$ $\quad$ $\bar{x}_j = 1 \quad j=1,\ldots,20$

$\bar{v} = (\bar{v})_i$

$\bar{v}_1 = 0$ $\quad$ $\bar{v}_7 = 0,7$

$\bar{v}_2 = 14$ $\quad$ $\bar{v}_8 = 0,8$

$\bar{v}_3 = 0$ $\quad$ $\bar{v}_9 = 0$

$\bar{v}_4 = 0$ $\quad$ $\bar{v}_{10} = 0$

$\bar{v}_5 = 0,5$ $\quad$ $\bar{v}_{11} = 0$

$\bar{v}_6 = 0,6$

Valeur du triplet $(L, \mathbb{R}^{20}, (\mathbb{R}_+)^{11}) = -5980,500$.

r=1

	xU	vU	wU
	+01 1056471CC798928	+00 CCCCCCCCCC000000	+00 0000000000000000
	+01 1058023413737c0	+01 1915238219137 48	+00 0000000000000000
	+01 1401368079292 58	+0C CCCCCCCCC000000	+00 0000000000000000
	+00 6045451174112c4	+0C CCCCCCCCCC000000	+00 0000000000000000
	+01 1424075135230 04	+01 285303356502047	+00 0000000000000000
A_F=	+02-5069379c2+12346		

r=2

	xU	vU	wU
	+01 100258620091242	+00 CCCCCCCCCC000000	+00 0000000000000000
	+01 100265485817377	+01 1956047C67397224	+01 1915238219137 48
	+01 101871169142577	+0C CCCCCCCCCCCC0000	+00 0000000000000000
	+00 97599969938062 43	+00 CCCCCCCC00000000	+00 0000000000000000
	+01 101935665761450	+01 299288962438592	+01 285303356502047
A_F=	+02-445137060341872		

r=3

	xU	vU	wU
	+01 100016895943916	+00 CCCCCCCCCC000000	+00 0000000000000000
	+01 100017872c76430	+01 1955864C0822415	+01 1996040673972 24
	+01 100085295294002	+0C CCCCCCCCC000000	+00 0000000000000000
	+00 99908320860 7074	+00 CCCCCCCCCC000000	+00 0000000000000000
	+01 100088104560716	+01 299973693615380	+01 299288962438592
A_F=	+02-4450003149513 74		

r=4

	xU	vU	wU
	+01 100060685137626	+00 CCCCCCCCCC000000	+00 0000000000000000
	+01 100C007052 07370	+01 200006376183129	+01 199986400822415
	+01 100004854953355	+0C CCCCCCCCCC000000	+00 0000000000000000
	+00 99994614598 4953	+00 CCCCCCCCCC000000	+00 0000000000000000
	+01 100C0497C990861	+01 3000110752096 95	+01 299973693615380
A_F=	+02-4450C00C0085315		

r=5

	xU	vU	wU
	+00 99999893 2821103	+00 CCCCCCCCCC000000	+00 0000000000000000
	+00 99999894 4820497	+01 1999992504795 45	+01 200006376183129
	+00 99999023C102668	+0C CCCCCCCCC000000	+00 0000000000000000
	+01 100000479812764	+00 CCCCCCCCCC000000	+00 0000000000000000
	+00 99998840753 7100	+01 300006852740462	+01 3000110752096 95
A_F=	+02-444599599749485		

r=6

	xU	vU	wU
	+00 99999866802 3642	+0C CCCCCCCCCC000000	+00 0000000000000000
	+00 99999864427 3433	+01 1999954479236740	+01 1999992504795 45
	+00 99998967940 4815	+0C CCCCCCCCCC000000	+00 0000000000000000
	+01 100001038254700	+00 CCCCCCCCCC000000	+00 0000000000000000
	+00 99998915251 8870	+01 2999995495793 03	+01 300006852740462
A_F=	+02-4449999999995278		

r=10

	XD	YC	WD
	+01 1000001095543 32	+00 CCCCCCCCC000000	+00 0000000000000 0
	+01 1000001162718 29	+01 2000042171711 19	+01 2000044598679 89
	+01 1000006 0C80C088	+00 CCCCCCCCC000000	+00 0000000000000 0
	+00 9999680735922 47	+00 CCCCCCCCC000000	+00 0000000000000 0
	+01 1000004766735 96	+01 3C0007620531260	+01 3000001397876 76
A_F=	+02-4449999999643 88		

r=90

	XD	YC	WD
	+00 9999999 30959039	+00 CCCCCCCC0000000	+00 0000000000000 0
	+00 9999999 03371662	+01 20CCC0300272900	+01 1999972294980 66
	+01 1000001 64039823	+00 CCCCCCCCCCCCC00	+00 0000000000000 0
	+01 1000004 67206332	+00 CCCCCCCC0000000	+00 0000000000000 0
	+01 1000002 07211960	+01 2999948185873 64	+01 2999971623616 99
A_F=	+02-4449999 9998678 6		

r=22

	XD	YC	WD
	+01 1000000 39457132	+00 CCCCCCCCCC00000	+00 0000000000000 0
	+01 1000000 42151079	+01 1999999924848181	+01 2000001125605 40
	+01 1000001 99376421	+00 CCCCCCCCC000000	+00 0000000000000 0
	+00 9999958 21339609	+00 CCCCC00CCC00000	+00 0000000000000 0
	+01 1000001 52372649	+01 3CCCCC059644483	+01 2999974391181 26
A_F=	+02-4456C0C0C0003460		

r=1

```
              XJ                          VO                         WO
+01 121521292543959 +00 000000000000000 +00 000000000000000
+01 122617373234105 +01 174418339218278 +00 000000000000000
+01 228253411291830 +00 000000000000000 +00 000000000000000
+00-548530021471183 +00 000000000000000 +00 000000000000000
+01 228003698503166 +01 248594211706312 +00 000000000000000
ALF:= +02-593835683452892
```

---

r=2

```
              XJ                          VO                         WO
+01 101092332412943 +00 000000000000000 +00 000000000000000
+01 101128212241731 +01 198499576033828 +01 174418339218278
+01 107563908160298 +00 000000000000000 +00 000000000000000
+00 908621652380786 +00 000000000000000 +00 000000000000000
+01 107547817378833 +01 296995428030532 +01 248594211706312
ALF:= +02-446813090521672
```

---

r=3

```
              XJ                          VO                         WO
+01 100107894792388 +00 000000000000000 +00 000000000000000
+01 100117652173999 +01 199955841806173 +01 198499576033828
+01 100298863795733 +00 000000000000000 +00 000000000000000
+00 996728465759587 +00 000000000000000 +00 000000000000000
+01 100307148830164 +01 299812254976691 +01 296995428030532
ALF:= +02-445005347178029
```

---

r=4

```
              XJ                          VO                         WO
+01 100048967384189 +00 000000000000000 +00 000000000000000
+01 100055871542120 +01 199993022743034 +01 199955841806173
+00 999612912231986 +00 000000000000000 +00 000000000000000
+01 100046515426975 +00 000000000000000 +00 000000000000000
+00 999613083007810 +01 299974143264765 +01 299812254976691
ALF:= +02-444999573155530
```

---

r=5

```
              XJ                          VO                         WO
+01 100048967384189 +00 000000000000000 +00 000000000000000
+01 100055871542120 +01 200030203679895 +01 199993022743034
+00 999612912231986 +00 000000000000000 +00 000000000000000
+01 100046515426975 +00 000000000000000 +00 000000000000000
+00 999613083007810 +01 300136008908254 +01 299974143264765
ALF:= +02-444999950020949
```

---

r=6

```
              XJ                          VO                         WO
+01 100039448320233 +00 000000000000000 +00 000000000000000
+01 100045416151972 +01 200001943078789 +01 200030203679895
+00 999389902266302 +00 000000000000000 +00 000000000000000
+01 100080114567709 +00 000000000000000 +00 000000000000000
+00 999408067633843 +01 300025843994766 +01 300136008908254
ALF:= +02-444999974144579
```

r=10

	XJ		VO		WO
+01	1000347970110G3	+00	CCCCCCCCCCCOOCC	+00	0000000000000J0
+01	1J0039810351569	+01	200054986441162	+01	199996960915035
+JJ	999633402576570	+00	CCCCCCCCCCCOOCC	+00	0000000000000J0
+01	1000554348659G3	+00	CCCCCCCCCCCOOCC	+00	0000000000000J0
+JJ	999663568826811	+01	3CC029081919264	+01	3000344939974Z7

A_F: = +02-444999973900345

---

r=20

	XJ		VO		WO
+01	100022186399739	+00	CCCCCCCCCOOOOCO	+00	0000000000000J0
+01	100025445672947	+01	199963373198652	+01	199996386702393
+JJ	999736534095282	+00	CCCCCCCCCOOOOCO	+00	0000000000000J0
+01	100027519299471	+00	CCCCCCCCCOOOOCO	+00	0000000000000J0
+JJ	999725753545032	+01	300C173300C36077	+01	299984205424985

A_F: = +02-444999988765045

---

r=23

	XJ		VO		WO
+01	100019464699822	+00	CCCCCCCCCCCCOCO	+00	0000000000000J0
+01	100022369883624	+01	199999715445462	+01	200019640409132
+JJ	999731091287995	+00	CCCCCCCCCCCOOCO	+00	0000000000000J0
+01	100032630862250	+00	CCCCCOOOOCOOOCO	+00	0000000000000J0
+JJ	999732043437495	+01	30C003436264647	+01	3000203126412Z5

A_F: = +02-444999991880287

Problème 2 : $H(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{11} v_i^2$

F -[illegible]

r=1 VALEUR := +04-607484287274888

XU		VU		WU	
+01	111955976236360	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	102213377234556	+02	132195359228820	+00	000000000000000
+01	106854524197434	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	101653760939561	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	100176054983627	+00	772087044816764	+00	000000000000000
+01	102694773088300	+00	742316441682571	+00	000000000000000
+01	102414118752549	+00	423805092613087	+00	000000000000000
+01	106273295192362	+01	175174496150889	+00	000000000000000
+01	102505332345702	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	104038854000186	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	104360298251249	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	103562310204012				
+01	103239599643717				
+01	103222066644760				
+01	103225175178771				
+01	103228799550617				
+01	101433374924005				
+01	103237947977100				
+01	103242867801995				
+01	101673944491527				

---

r=2 VALEUR := +04-598119333770067

XU		VU		WU	
+00	956860769961534	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+00	995978622122567	+02	140400599829050	+02	132195359228820
+01	100694111391750	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	101220839881004	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	100153051089949	+00	554514354086655	+00	772087044816764
+00	997795535706041	+00	831971742936798	+00	742316441682571
+01	100553042706133	+00	493578350162320	+00	423805092613087
+01	100481114344912	+00	958524207660775	+01	175174496150889
+01	100187580094700	+00	000000000000000	+00	000000000000000

+01	100605054056267	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	100693652367821	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	100474182653462				
+01	100379812413155				
+01	100379887037401				
+01	100379951735471				
+01	100380008364362				
+00	991435807953470				
+01	100380102783369				
+01	100380142552778				
+00	995227526136802				

r=3 VALEUR := +04-5986504335141 82

XU	VU	WU
+00 5906341862531 92	+0C 0000000000000000	+00 0000000000000000
+00 9983695957914 22	+02 1403834895403318	+02 1404005998290 50
+01 1001152650657 15	+0C 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 1002736381536 79	+0C 0000000000000000	+00 0000000000000000
+00 9998078074627 09	+0C 5000076092048 79	+00 5545143540865 55
+00 9992795557149 13	+0C 5964049308306 12	+00 6315711742936 798
+01 1000226534959 66	+00 5337134395403 93	+00 4935783501623 20
+01 1000466527275 27	+0C 7214751318303 73	+00 9985242076600 775
+00 9982429194238 97	+0C 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 1002684274677 28	+0C 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 1003591269750 41	+0C 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 1001281536893 79		
+01 1000270972380 83		
+01 1000271029150 46		
+01 1000271078332 61		
+01 1000271121399 09		
+00 9968928169106 467		
+01 1000271193206 83		
+01 1000271223453 00		
+00 9978854376501 55		

---

r=4 VALEUR := +04-5980404272939 05

XU	VU	WU
+00 9957539255210 50	+0C 0000000000000000	+00 0000000000000000
+00 9982222598144 79	+02 1388231657327 90	+02 1403834894633 18
+01 1000328844386 11	+0C 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 1000617016246 31	+0C 0000000000000000	+00 0000000000000000
+00 9994059855551 55	+0C 4548836904259 18	+00 5000076092046 79
+00 9990936279135 59	+00 5526464202113 59	+00 5964049308306 12
+00 9995998006154 51	+00 5678617294896 43	+00 5337134395403 93
+00 9997543539432 01	+0C 5872503965314 37	+00 7214751318303 73
+00 9976101470427 20	+0C 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 1002033402182 95	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 1002925458029 27	+0C 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 1000636528334 21		
+00 9996303086071 604		
+00 9996302359388 582		
+00 9996301756028 88		
+00 9996301271432 47		
+00 9986074549068 77		
+00 9996300356774 97		
+00 9996300028374 60		

+00 9984671129499 07

G=5 VALEUR := +04-598051800942694

	XU		VC		WU
+01	100512732015053	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	100016805951628	+02	140033131715772	+02	150623165732790
+00	999607800089785	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+00	999402684770401	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	100015360616405	+00	482153710153513	+00	454683690425918
+01	100062473096705	+00	582481969462021	+00	552646420211559
+00	999937503280479	+00	602299813059197	+00	567861729489643
+00	999792947006062	+00	658465007256765	+00	587250596531437
+00	998011863422985	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	100216775020001	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	100301358850982	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	100085451789289				
+00	999908077988588				
+00	999908065615709				
+00	999908051155806				
+00	999908040250798				
+01	100058721506621				
+00	999908022076592				
+00	999908014413470				
+01	100035616045394				

G≥10 VALEUR := +04-598649729422766

	XU		VC		WU
+00	996131706414775	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+00	998619039297046	+02	139959966710061	+02	140023578343290
+01	100058355876199	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	100006367492205	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+00	999865511620065	+00	453243125120168	+00	467626154065019
+00	999794798763403	+00	585093939392613	+00	595196483677473
+00	999950997900665	+00	736227884307426	+00	715368656604729
+01	100000184047178	+00	795109545152384	+00	846313238601895
+00	996620535676742	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	100132007557793	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	100182922965312	+00	000000000000000	+00	000000000000000
+01	100053027894424				
+00	999961230672351				
+00	999961225075348				
+00	999961221176369				
+00	999961217227872				
+00	999248906029659				
+00	999961210655605				
+00	999961207887609				
+00	999444359839043				

r=20 VALEUR := +04 [illegible]

XL	VC	MC
+00 [illegible]	+00 [illegible]	+00 [illegible]
+00 [illegible]	+02 [illegible]	+02 [illegible]
+01 [illegible]	+00 [illegible]	+00 [illegible]
+01 [illegible]	+00 [illegible]	+00 [illegible]
+01 [illegible]	+00 [illegible]	+00 [illegible]
+01 [illegible]	+00 [illegible]	+00 [illegible]
+01 [illegible]	+00 [illegible]	+00 [illegible]
+01 [illegible]	+00 [illegible]	+00 [illegible]
+00 [illegible]	+00 [illegible]	+00 [illegible]
+00 [illegible]	+00 [illegible]	+00 [illegible]
+00 [illegible]		
+01 [illegible]		
+01 [illegible]		

+01	[illegible]
+01	[illegible]
+01	[illegible]
+01	[illegible]
+01	[illegible]
+01	[illegible]

r=23 VALEUR := +04 [illegible]

XU	VC	MC
+00 [illegible]	+00 [illegible]	+00 [illegible]
+00 [illegible]	+02 [illegible]	+02 [illegible]
+01 [illegible]	+00 [illegible]	+00 [illegible]
+01 [illegible]	+00 [illegible]	+00 [illegible]
+01 [illegible]	+00 [illegible]	+00 [illegible]
+01 [illegible]	+00 [illegible]	+00 [illegible]
+01 [illegible]	+00 [illegible]	+00 [illegible]
+01 [illegible]	+00 [illegible]	+00 [illegible]
+01 [illegible]	+00 [illegible]	+00 [illegible]
+00 [illegible]	+00 [illegible]	+00 [illegible]
+00 [illegible]		
+01 [illegible]		
+01 [illegible]		
+01 [illegible]		
+01 [illegible]		
+01 [illegible]		
+01 [illegible]		
+01 [illegible]		
+01 [illegible]		

Problème 2 : $H(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{11} (\exp(v_i) - v_i - 1)$

r=1 VALEUR := +04-641432192625783

X0	V0	W0
+00 509482619935813	-15 222044604925031	+01 500000000000000
+00 983243845130310	+02 100417194099173	+01 500000000000000
+01 154857620315548	-15 222044604925031	+01 500000000000000
+01 138947448553530	-15 222044604925031	+01 500000000000000
+01 117625452153209	+01 179989523663881	+01 500000000000000
+01 100838833425176	+01 149730465398839	+01 500000000000000
+01 134014961382965	+01 611657226381652	+01 500000000000000
+01 147703932431571	+01 444985450233918	+01 500000000000000
+01 146046933910637	-15 222044604925031	+01 500000000000000
+01 125805739179315	-15 222044604925031	+01 500000000000000
+01 124951794191414	-15 222044604925031	+01 500000000000000
+01 133163536509633		
+01 143418703443521		
+01 139075638579106		
+01 139228809343693		
+01 139361855212303		
+01 104731935972074		
+01 139572296919479		
+01 139831361457897		
+01 113262049932344		

---

r=2 VALEUR := +04-601111943136250S

X0	V0	W0
+00 875416139376773	+00 000000000000000	-15 222044604925031
+00 985441636951452	+02 131155813333738	+02 100417194099173
+01 110745042991398	+00 000000000000000	-15 222044604925031
+01 109726505234529	+00 000000000000000	-15 222044604925031
+01 102889148193617	+00 533163949825019	+01 179989523668881
+00 996562304461280	+00 912862418315413	+01 149730465398839
+01 106097208536459	+01 531650316196224	+01 611657226381652
+01 109578558911438	+01 138406031689849	+01 444985450239918
+01 112934077591272	+00 000000000000000	-15 222044604925031
+00 993275716347217	+00 000000000000000	-15 222044604925031
+00 965364032313467	+00 000000000000000	-15 222044604925031

+01 103534181200185
+01 107139385552463
+01 106813267567548
+01 106827604878643
+01 106840056278614
+01 106843949436786
+01 106859330785954
+01 106798702995294
+01 102029537344873

r=10 VALEUR := +04-59804750621l314

X0	V0	W0
+00 997131009537384 3	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 1000521113309477	+02 133239471393506	+02 139286791917966
+01 100197723836781	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 100213370434797	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 100053473379300	+00 498784884444828	+00 498553008218921
+00 998957345799231	+00 554037554378377	+00 607489761466976
+01 100143402427042	+00 384958300915842	+01 118842152323543
+01 100216304959702	+00 798269550925393	+00 801993876432989
+01 101235008793645	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+00 990024920158691	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+00 984005032564179	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+00 996259841235006		
+01 100160488010965		
+01 100160520231436		
+01 100160548166297		
+01 100160572617267		
+01 100047084327597		
+01 100160613385414		
+01 100160630557135		
+01 100031633424991		

r=90 VALEUR := +04-598050023241285

X0	V0	W0
+00 999843068360021	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 100012768453613	+02 133991151615605	+02 139986213449077
+01 100009952345067	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 100010728711647	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 100035096311654	+00 500221245413027	+00 500227849743819
+01 100030074537687	+00 500313481977757	+00 600362555108952
+01 100007795991677	+00 743115945055079	+00 752386428402487
+01 100003421325763	+00 830842591793574	+00 800988795723313
+01 100061736102963	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+00 999443781150444	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+00 999203622788034	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+00 999813957106983		
+01 100008143163673		
+01 100008144757700		
+01 100008146130707		
+01 100008147340340		
+01 100002605868272		
+01 100008149366194		
+01 100008150215604		
+01 100016322056048		

r=34 VALEUR:= +04-59804999999342

X0	V0	W0
+00 999991098733349	+00 000000000000000	+00 000000000000000
+00 999999754185271	+02 140000736551490	+02 140003582906941
+01 100000398465815	+00 000000000000000	+00 000000000000000
+01 100000398737814	+00 000000000000000	+00 000000000000000
+01 100000304102927	+00 500171200887999	+00 500212610709071
+01 100000581581443	+00 599712770539976	+00 599435146047141
+01 100000299515659	+00 700598661496303	+00 701930828014640
+01 100000122009367	+00 800087994067463	+00 800162992140013
+01 100002745577633	+00 000000000000000	+00 000000000000000
+00 999973535866347	+00 000000000000000	+00 000000000000000
+00 999952519559783	+00 000000000000000	+00 000000000000000
+00 999990548575394		
+01 100000283433403		
+01 100000283498884		
+01 100000282536984		
+01 100000283570986		
+01 100000008120635		
+01 100000283540283		
+01 100000283678859		
+01 100000093399628		

---

r=5 VALEUR:= +04-598105342656523

X0	V0	W0
+00 998629928138554	+00 000000000000000	+00 000000000000000
+01 100046658248637	+02 139365224243593	+02 139789103857580
+01 100605889124281	+00 000000000000000	+00 000000000000000
+01 100700836506734	+00 000000000000000	+00 000000000000000
+01 100241975531713	+00 502804160511025	+00 529433227911693
+00 999326326576479	+00 589537294493728	+00 620444636565772
+01 100429293399844	+01 262300658930020	+01 334517143593886
+01 100540229898137	+00 874720623910034	+01 100181833691673
+01 103474473289255	+00 000000000000000	+00 000000000000000
+00 369649916494001	+00 000000000000000	+00 000000000000000
+00 355035446206242	+00 000000000000000	+00 000000000000000
+00 999586396579159		
+01 100452839998775		
+01 100452936423763		
+01 100453020024991		
+01 100453093201144		
+00 999742472200404		
+01 100453215213443		
+01 100453266506516		
+01 100115571434042		

r=0

VALEUR:= +04-598077778173894

X0	V0	W0
+00 9933336342127l9	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 1000689093983239	+02 1386975627343B3	+02 1393652242485e3
+01 1003323073971S0	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 1004337841415056	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 1002356553129?2	+00 4339943472770B8	+00 5028041605110?5
+01 1001476509065969	+00 6458198438959?4	+00 5805372944037?8
+01 1002933439697?4	+01 2153565259340?5	+01 2623006589300?0
+01 1003216415381?1	+00 828726331367700	+00 8747206239100?4
+01 1024807050339?0	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+00 977653570515991	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+00 967275964552296	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+00 992197307043704		
+01 1002997641509445		
+01 1002990253556?4		
+01 1002998784038?3		
+01 1002990249363?1		
+01 1000361083607?4		
+01 1003110022557?9		
+01 1003100343653?7		
+01 1001155384495?0		

r=3

VALEUR:= +04-598292317982517

X0	V0	W0
+00 968575872198424	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+00 996945480365428	+02 1391915493930?6	+02 1311558133887?8
+01 1017380558130?7	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 1019054599225?1	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+01 1004684709058?0	+00 5465984833973?2	+00 6931639498250?9
+00 996324180326679	+00 587280243757729	+00 9128624183154?3
+01 1010670098681165	+01 407519618243988	+01 5316503161962?4
+01 1013094940178255	+01 1390991358570?0	+01 1884060316898?9
+01 1055674225433?9	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+00 960359291938380	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+00 938773139846335	+00 0000000000000000	+00 0000000000000000
+00 989305456421545		
+01 1011366534944?1		
+01 1011369425309?9		
+01 1011371933275?1		
+01 1011374127723?2		
+00 994839825587173		
+01 1011377785904?0		
+01 1011379323273?7		
+00 999476590535977		

---

r=4 VALEUR := +04-598142541564657

X0		V0		W0	
+00	989805540537766	+00	000000000001000	+00	000000000000000
+01	100066013482988	+02	132789103857580	+02	139191549389056
+01	100636581842277	+00	000000000001000	+00	000000000000000
+01	100701759418091	+00	000000000001000	+00	000000000000000
+01	100233085882484	+00	528433227911693	+00	546598483307362
+00	998808363136413	+00	529444636555772	+00	687280243757729
+01	100453808955911	+01	334517143593886	+01	407519618249988
+01	100592597539424	+01	130181833691673	+01	109999135857050
+01	103537275832980	+00	000000000001000	+00	000000000000000
+00	969530965566994	+00	000000000001000	+00	000000000000000
+00	954740978788030	+00	000000000001000	+00	000000000000000
+00	989623548758555				
+01	100481038211421				
+01	100481140729637				
+01	100481229513767				
+01	100481307414052				
+01	100023355518821				
+01	100481437136593				
+01	100481491777325				
+01	100157826788917				

REFERENCES

[1] P.J. LAURENT

Approximation et Optimization
Hermann (1972).

[2] P. HUARD

Tour d'horizon : Programmation non linéaire.
R.I.R.O. (5e année, R-1 (1971), p. 3-48)

[3] B. MARTINET

Algorithmes pour la résolution de problèmes d'optimisation et de minimax.
Thèse d'Etat, Grenoble (1972).

[4] J.J. MOREAU

Proximité et dualité dans un espace Hilbertien :
Bull, Soc. Math. France, 93, (1965), p. 273 à 299.

TABLE DES MATIERES

			Pages
- INTRODUCTION GENERALE -			1
Notations et définitions	:		3
PREMIERE PARTIE	:	REGULARISATION DES PROBLEMES D'OPTIMISATION	
Introduction	:		7
Chapitre 1	:	Régularisations ordinaires	10
(1.1)	:	Cas de convergence	11
(1.2)	:	Existence et propriétés des points d'adhérence des solutions du problème (P_n).	17
(1.3)	:	Cas convexe	22
Chapitre 2	:	Régularisations par translation	24
(2.1)	:	Régularisation par translation simples	25
(2.2)	:	Propriétés de l'uniforme convexité	32
(2.3)	:	Amélioration du procédé de régularisation par translation	38
(2.4)	:	Quelques propriétés de l'application U définie en (2.1)	43
DEUXIEME PARTIE	:	REGULARISATION DES PROBLEMES DE MINI-MAX	
Introduction	:		48
Chapitre 3	:	Généralités sur la théorie des perturbations	49
(3.1)	:	Perturbations	49
(3.2)	:	Notion de point de selle d'un triplet	55

Chapitre 4 : Régularisation des problèmes de points de selle 58
Régularisation partielles 59

(4.1) : Régularisations ordinaires 60
(4.2) : Régularisation par translation 70
(4.3) : Régularisation des problèmes de points de selle, sur l'ensemble des variables 77

TROISIEME PARTIE : METHODES NUMERIQUES POUR LA RECHERCHE DES POINTS DE SELLE DES FONCTIONNELLES CONVEXES-UNIFORMEMENT CONCAVES.

Introduction : 83

Chapitre 5 : Algorithme pour la recherche des points de selle des fonctionnelles convexe-uniformément concaves 84

(5.1) : Position du problème et description de l'algorithme 85
(5.2) : Propriétés de l'algorithme 91
(5.3) : Convergence de l'algorithme 95
(5.4) : Estimation de l'erreur 99
(5.5) : Généralisation du procédé décrit en (5.1.2) 102
(5.6) : Calculs intermédiaires 103
(5.7) : Application du procédé décrit en (5.1.2) à deux problèmes de régularisation partielle 109

ANNEXE 117

REFERENCES 135

VU

Grenoble, le

Le Président de la thèse

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale